

# Planche n° 4. Réduction. Corrigé

## Exercice n° 1

**1ère solution.**  $A = 2J - I_3$  où  $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ . On a  $J^2 = 3J$  et plus généralement  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ ,  $J^k = 3^{k-1}J$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Puisque les matrices  $2J$  et  $-I$  commutent, la formule du binôme de NEWTON permet d'écrire

$$\begin{aligned} A^n &= (2J - I_3)^n = (-I_3)^n + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (2J)^k (-I_3)^{n-k} = (-1)^n I_3 + \left( \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 2^k 3^{k-1} (-1)^{n-k} \right) J \\ &= (-1)^n I_3 + \frac{1}{3} \left( \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 6^k (-1)^{n-k} \right) J = (-1)^n I_3 + \frac{1}{3} ((6-1)^n - (-1)^n) J \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5^n + 2(-1)^n & 5^n - (-1)^n & 5^n - (-1)^n \\ 5^n - (-1)^n & 5^n + 2(-1)^n & 5^n - (-1)^n \\ 5^n - (-1)^n & 5^n - (-1)^n & 5^n + 2(-1)^n \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

ce qui reste vrai quand  $n = 0$ .

Soit de nouveau  $n \in \mathbb{N}^*$ .

$$\begin{aligned} ((-1)^n I_3 + \frac{1}{3}(5^n - (-1)^n)J) \times ((-1)^{-n} I_3 + \frac{1}{3}(5^{-n} - (-1)^{-n})J) \\ = I_3 + \frac{1}{3}((-5)^n - 1 + (-5)^{-n} - 1)J + \frac{1}{9}(1 - (-5)^n - (-5)^{-n} + 1)J^2 \\ = I_3 + \frac{1}{3}((-5)^n - 1 + (-5)^{-n} - 1)J + \frac{3}{9}(1 - (-5)^n - (-5)^{-n} + 1)J = I_3, \end{aligned}$$

et donc  $A^n$  est inversible et

$$A^{-n} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5^{-n} + 2(-1)^{-n} & 5^{-n} - (-1)^{-n} & 5^{-n} - (-1)^{-n} \\ 5^{-n} - (-1)^{-n} & 5^{-n} + 2(-1)^{-n} & 5^{-n} - (-1)^{-n} \\ 5^{-n} - (-1)^{-n} & 5^{-n} - (-1)^{-n} & 5^{-n} + 2(-1)^{-n} \end{pmatrix}.$$

Finalement

$$\forall n \in \mathbb{Z}, A^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5^n + 2(-1)^n & 5^n - (-1)^n & 5^n - (-1)^n \\ 5^n - (-1)^n & 5^n + 2(-1)^n & 5^n - (-1)^n \\ 5^n - (-1)^n & 5^n - (-1)^n & 5^n + 2(-1)^n \end{pmatrix}.$$

**2ème solution.** Puisque  $\text{rg}(A+I) = 1$ ,  $\dim(\text{Ker}(A+I)) = 2$  et  $-1$  est valeur propre de  $A$  d'ordre au moins 2. La troisième valeur propre  $\lambda$  est fournie par la trace :  $\lambda - 1 - 1 = 3$  et donc  $\lambda = 5$ . Par suite,  $\chi_A = (X+1)^2(X-5)$ . On note que 0 n'est pas valeur propre de  $A$  et donc  $A$  est inversible.

De plus,  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-1} \Leftrightarrow x + y + z = 0$  et donc  $E_{-1} = \text{Vect}(e_1, e_2)$  où  $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

De même,  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_5 \Leftrightarrow x = y = z$  et  $E_5 = \text{Vect}(e_3)$  où  $e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

On pose  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$  et  $D = \text{diag}(-1, -1, 5)$  et on a  $A = PDP^{-1}$ .

Calcul de  $P^{-1}$ . Soit  $(i, j, k)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .

$$\begin{cases} e_1 = i - j \\ e_2 = i - k \\ e_3 = i + j + k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} j = i - e_1 \\ k = i - e_2 \\ e_3 = i + i - e_1 + i - e_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} i = \frac{1}{3}(e_1 + e_2 + e_3) \\ j = \frac{1}{3}(-2e_1 + e_2 + e_3) \\ k = \frac{1}{3}(e_1 - 2e_2 + e_3) \end{cases}$$

et donc  $P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ . Soit alors  $n \in \mathbb{Z}$ .

$$\begin{aligned} A^n &= PD^nP^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} (-1)^n & (-1)^n & 5^n \\ -(-1)^n & 0 & 5^n \\ 0 & -(-1)^n & 5^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5^n + 2(-1)^n & 5^n - (-1)^n & 5^n - (-1)^n \\ 5^n - (-1)^n & 5^n + 2(-1)^n & 5^n - (-1)^n \\ 5^n - (-1)^n & 5^n - (-1)^n & 5^n + 2(-1)^n \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

et on retrouve le résultat obtenu plus haut, le calcul ayant été mené directement avec  $n$  entier relatif.

**3ème solution.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . La division euclidienne de  $X^n$  par  $\chi_A$  fournit trois réels  $a_n$ ,  $b_n$  et  $c_n$  et un polynôme  $Q$  tels que  $X^n = \chi_A Q + a_n X^2 + b_n X + c_n$ . En prenant les valeurs des deux membres en 5, puis la valeur des deux membres ainsi que de leurs dérivées en  $-1$ , on obtient

$$\begin{cases} 25a_n + 5b_n + c_n = 5^n \\ a_n - b_n + c_n = (-1)^n \\ -2a_n + b_n = n(-1)^{n-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_n = 2a_n - n(-1)^n \\ 35a_n + c_n = 5n(-1)^n + 5^n \\ -a_n + c_n = -(n-1)(-1)^n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_n = \frac{1}{36}(5^n + (6n-1)(-1)^n) \\ c_n = \frac{1}{36}(5^n + (-30n+35)(-1)^n) \\ b_n = \frac{1}{36}(2 \times 5^n + (-24n-2)(-1)^n) \end{cases}.$$

Le théorème de CAYLEY-HAMILTON fournit alors

$$\begin{aligned} A^n &= \frac{1}{36} ((5^n + (6n-1)(-1)^n)A^2 + 2(5^n - (12n+1)(-1)^n)A + (5^n + (-30n+35)(-1)^n)I_3) \\ &= \frac{1}{36} \left( (5^n + (6n-1)(-1)^n) \begin{pmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{pmatrix} + 2(5^n - (12n+1)(-1)^n) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right. \\ &\quad \left. + (5^n + (-30n+35)(-1)^n) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 12 \times 5^n + 24(-1)^n & 12 \times 5^n - 12(-1)^n & 12 \times 5^n - 12(-1)^n \\ 12 \times 5^n - 12(-1)^n & 12 \times 5^n + 24(-1)^n & 12 \times 5^n - 12(-1)^n \\ 12 \times 5^n - 12(-1)^n & 12 \times 5^n - 12(-1)^n & 12 \times 5^n + 24(-1)^n \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5^n + 2(-1)^n & 5^n - (-1)^n & 5^n - (-1)^n \\ 5^n - (-1)^n & 5^n + 2(-1)^n & 5^n - (-1)^n \\ 5^n - (-1)^n & 5^n - (-1)^n & 5^n + 2(-1)^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On retrouve encore une fois le même résultat mais pour  $n \in \mathbb{N}^*$  uniquement.

### Exercice n° 2

Soit  $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ . Si  $X^2 = A$  alors  $AX = X^3 = XA$  et donc  $X$  et  $A$  commutent.

$A$  admet trois valeurs propres réelles et simples à savoir 1, 3 et 4. Donc  $A$  est diagonalisable dans  $\mathbb{R}$  et les sous espaces propres de  $A$  sont des droites.  $X$  commute avec  $A$  et donc laisse stable les trois droites propres de  $A$ .

Ainsi une base de  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  formée de vecteurs propres de  $A$  est également une base de vecteurs propres de  $X$  ou encore, si  $P$  est une matrice réelle inversible telle que  $P^{-1}AP$  soit la matrice diagonale  $D_0 = \text{diag}(3, 4, 1)$  alors pour la même matrice  $P$ ,  $P^{-1}XP$  est une matrice diagonale  $D$ . De plus

$$X^2 = A \Leftrightarrow PD^2P^{-1} = PD_0P^{-1} \Leftrightarrow D^2 = D_0 \Leftrightarrow D = \text{diag}(\pm\sqrt{3}, \pm 2, \pm 1)$$

ce qui fournit huit solutions deux à opposées. On peut prendre  $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -16 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  puis  $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 0 \\ -5/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . D'où

les solutions

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -16 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3}\varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & 2\varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 0 \\ -5/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{3}\varepsilon_1 & 0 & 0 \\ -16\sqrt{3}\varepsilon_1 & 2\varepsilon_2 & 0 \\ 5\sqrt{3}\varepsilon_1 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 0 \\ -5/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \sqrt{3}\varepsilon_1 & 0 & 0 \\ -8\sqrt{3}\varepsilon_1 + 16\varepsilon_2 & 2\varepsilon_2 & 0 \\ 5(\sqrt{3}\varepsilon_1 - \varepsilon_3)/2 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}.$$

où  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \in \{-1, 1\}^3$ .

### Exercice n° 3

$$1) \chi_A = \begin{vmatrix} X-3 & -1 & 0 \\ 4 & X+1 & 0 \\ -4 & -8 & X+2 \end{vmatrix} = (X+2)((X-3)(X+1)+4) = (X+2)(X^2-2X+1) = (X+2)(X-1)^2.$$

A diagonalisable  $\Rightarrow \dim(\text{Ker}(A-I)) = 2 \Rightarrow \text{rg}(A-I) = 1$  ce qui n'est pas. Donc A n'est pas diagonalisable. De plus,

$$E_{-2} = \text{Vect}(e_1) \text{ où } e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } E_1 = \text{Vect}(e_2) \text{ où } e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

$$2) (A-I)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ 4 & 8 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ 4 & 8 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -36 & -36 & 9 \end{pmatrix} \text{ et donc } \text{Ker}(A-I)^2 \text{ est le plan d'équation } \\ 4x + 4y - z = 0.$$

3) On note f l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  est A. Le théorème de CAYLEY-HAMILTON et le théorème de décomposition des noyaux permettent d'affirmer

$$\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) = \text{Ker}(A+2I) \oplus \text{Ker}(A-I)^2.$$

De plus, chacun des sous-espaces  $\text{Ker}(A+2I)$  et  $\text{Ker}(A-I)^2$  étant stables par f, la matrice de f dans toute base adaptée à cette décomposition est diagonale par blocs. Enfin,  $\text{Ker}(A-I)$  est une droite vectorielle contenue dans le plan  $\text{Ker}(A-I)^2$  et en choisissant une base de  $\text{Ker}(A-I)^2$  dont l'un des deux vecteurs est dans  $\text{Ker}(A-I)$ , la matrice de f aura la forme voulue.

On a déjà choisi  $e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$  puis on prend  $e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ . On note  $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ . P est inversible d'inverse  $P^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ . On peut déjà affirmer que  $P^{-1}AP$  est de la forme  $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \times \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Plus précisément

$$Ae_3 - e_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & 8 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} = e_2$$

et donc  $Ae_3 = e_2 + e_3$  puis

$$A = PTP^{-1} \text{ où } P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Posons  $T = D + N$  où  $D = \text{diag}(-2, 1, 1)$  et  $N = E_{2,3}$ . On a  $ND = DN$  et  $N^2 = 0$ . Puisque les matrices D et N commutent, la formule du binôme de NEWTON permet d'écrire

$$T^n = D^n + nD^{n-1}N = \text{diag}((-2)^n, 1, 1) + n\text{diag}((-2)^{n-1}, 1, 1)E_{2,3} = \text{diag}((-2)^n, 1, 1) + nE_{2,3} \\ = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Puis

$$\begin{aligned}
A^n &= P T^n P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & -4 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 & n+1 \\ 0 & -2 & -2n-1 \\ (-2)^n & -4 & -4n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & -4 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2n+1 & n & 0 \\ -4n & -2n+1 & 0 \\ -4(-2)^n - 8n+4 & -4(-2)^n - 4n+4 & (-2)^n \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \begin{pmatrix} 2n+1 & n & 0 \\ -4n & -2n+1 & 0 \\ -4(-2)^n - 8n+4 & -4(-2)^n - 4n+4 & (-2)^n \end{pmatrix}.$$

#### Exercice n° 4

Soit  $P$  un élément de  $\mathbb{R}_{2n}[X]$ .  $f(P)$  est un polynôme de degré inférieur ou égal à  $2n+1$  et de plus, si  $a$  est le coefficient de  $X^{2n}$  dans  $P$ , le coefficient de  $X^{2n+1}$  dans  $f(P)$  est  $2na - 2na = 0$ . Donc  $f(P)$  est un élément de  $\mathbb{R}_{2n}[X]$ . La linéarité de  $f$  étant claire,  $f$  est bien un endomorphisme de  $\mathbb{R}_{2n}[X]$ .

Cherchons maintenant  $P$  polynôme non nul et  $\lambda$  réel tels que  $f(P) = \lambda P$  ce qui équivaut à

$$\frac{P'}{P} = \frac{2nX + \lambda}{X^2 - 1} = \frac{1}{2} \left( \frac{2n + \lambda}{X - 1} + \frac{2n - \lambda}{X + 1} \right).$$

En identifiant à la décomposition en éléments simples classique de  $\frac{P'}{P}$  (à savoir si  $P = K(X - z_1)^{\alpha_1} \dots (X - z_k)^{\alpha_k}$  avec

$K \neq 0$  et les  $z_i$  deux à deux distincts, alors  $\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^k \frac{\alpha_i}{X - z_i}$ ), on voit que nécessairement  $P$  ne peut admettre pour racines

dans  $\mathbb{C}$  que  $-1$  et  $1$  et d'autre part que  $P$  est de degré  $\frac{1}{2}(2n + \lambda + 2n - \lambda) = 2n$ .  $P$  est donc nécessairement de la forme

$$P = aP_k \text{ avec } a \in \mathbb{R}^* \text{ et } P_k = (X - 1)^k (X + 1)^{2n-k} \text{ avec } k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket.$$

Réciproquement, chaque  $P_k$  est non nul et vérifie

$$\frac{P'_k}{P_k} = \frac{k}{X - 1} + \frac{2n - k}{X + 1} = \frac{1}{2} \left( \frac{2n + (2k - 2n)}{X - 1} + \frac{2n - (2k - 2n)}{X + 1} \right).$$

Donc, pour chaque  $k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket$ ,  $P_k$  est vecteur propre de  $f$  associé à la valeur propre  $\lambda_k = 2(k - n)$ .

Ainsi,  $f$  admet  $2n + 1$  valeurs propres, nécessairement simples car  $\dim(\mathbb{R}_{2n}[X]) = 2n + 1$ .  $f$  est donc diagonalisable et les sous espaces propres de  $f$  sont les droites  $\text{Vect}(P_k)$ ,  $0 \leq k \leq 2n$ .

#### Exercice n° 5

Soit  $P = aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbb{R}_3[X]$

$$AP - (X^4 - X)P = (X - 1)P = aX^4 + (b - a)X^3 + (c - b)X^2 + (d - c)X - d = a(X^4 - X) + (b - a)X^3 + (c - b)X^2 + (a + d - c)X - d.$$

et donc  $AP = (X^4 - X)(P + a) + (b - a)X^3 + (c - b)X^2 + (a + d - c)X - d$  et donc  $f(P) = (b - a)X^3 + (c - b)X^2 + (a + d - c)X - d$ .

Par suite,  $f$  est un endomorphisme de  $E$  et la matrice de  $f$  dans la base canonique  $(1, X, X^2, X^3)$  de  $E$  est

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

puis

$$\begin{aligned}
X\lambda &= \begin{vmatrix} X+1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & X+1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & X+1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & X+1 \end{vmatrix} = (X+1) \begin{vmatrix} X+1 & 0 & -1 \\ -1 & X+1 & 0 \\ 0 & -1 & X+1 \end{vmatrix} \\
&= (X+1)((X+1)^3 - 1) = X(X+1)(X^2 + 3X + 3).
\end{aligned}$$

A admet quatre valeurs propres simples dans  $\mathbb{C}$ , deux réelles 0 et -1 et deux non réelles  $-1 + j$  et  $-1 + j^2$ .  $\chi_f$  n'est pas scindé sur  $\mathbb{R}$  et donc  $f$  n'est pas diagonalisable.

- Soit  $P \in E$ .  $P \in \text{Ker}f \Leftrightarrow b - a = c - b = a + d - c = -d = 0 \Leftrightarrow a = b = c$  et  $d = 0$ .  $\text{Ker}f = \text{Vect}(X^3 + X^2 + X)$ .
- Soit  $P \in E$ .  $P \in \text{Ker}(f + \text{Id}) \Leftrightarrow b = c = a + d = 0 \Leftrightarrow b = c = 0$  et  $d = -a$ .  $\text{Ker}(f + \text{Id}) = \text{Vect}(X^3 - 1)$ .
- $\text{rg}(f) = 3$  et immédiatement  $\text{Im}f = \text{Vect}(X - 1, X^2 - X, X^3 - X^2)$ .

Si  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , on peut continuer :

$$P \in \text{Ker}(f + (1 - j)\text{Id}) \Leftrightarrow b - ja = c - jb = a + d - jc = -jd = 0 \Leftrightarrow b = ja, c = j^2a \text{ et } d = 0.$$

$$\text{Donc } \text{Ker}(f + (1 - j)\text{Id}) = \text{Vect}(X^3 + jX^2 + j^2X) \text{ et en conjuguant } \text{Ker}(f + (1 - j^2)\text{Id}) = \text{Vect}(X^3 + j^2X^2 + jX).$$

**Remarque.**  $B = X(X-1)(X-j)(X-j^2)$  et on a trouvé pour base de vecteurs propres les quatre polynômes de LAGRANGE  $X^3 - 1 = (X-1)(X-j)(X-j^2)$  puis  $X^3 + X^2 + X = X(X-j)(X-j^2)$  puis  $X^3 + jX^2 + j^2X = X(X-1)(X-j^2)$  et enfin  $X^3 + j^2X^2 + jX = X(X-1)(X-j)$ . C'est une généralité. On peut montrer que si  $E = \mathbb{C}_n[X]$  et si  $B$  a  $n+1$  racines deux à deux distinctes dans  $\mathbb{C}$  alors  $f$  est diagonalisable et une base de vecteurs propres est fournie par les polynômes de LAGRANGE associés aux racines de  $B$  et ceci pour un polynôme  $A$  quelconque.

### Exercice n° 6

Si  $p = q$ , le résultat est connu :  $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ .

Supposons par exemple  $p < q$ . On se ramène au cas de matrices carrées en complétant. Soient  $A' = \begin{pmatrix} A & \\ & 0_{q-p, q} \end{pmatrix}$  et  $B' = \begin{pmatrix} B & \\ & 0_{q, q-p} \end{pmatrix}$ .  $A'$  et  $B'$  sont des matrices carrées de format  $q$  et  $A'B'$  et  $B'A'$  ont même polynôme caractéristique.

$$\text{Un calcul par blocs donne } B'A' = BA \text{ et } A'B' = \begin{pmatrix} A & \\ & 0_{q-p, q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & \\ & 0_{q, q-p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AB & 0_{p, q-p} \\ & 0_{q-p, q-p} \end{pmatrix}.$$

Donc  $\chi_{BA} = X^{q-p}\chi_{AB}$  ou encore, avec une écriture plus symétrique,  $X^p\chi_{BA} = X^q\chi_{AB}$  ce qui est vrai dans tous les cas.

$$\forall A \in \mathcal{M}_{p, q}(\mathbb{K}), \forall B \in \mathcal{M}_{q, p}(\mathbb{K}), X^p\chi_{BA} = X^q\chi_{AB}.$$

### Exercice n° 7

Si  $u$  est inversible,

$$\det(u + v) = \det u \Leftrightarrow \det u \times \det(\text{Id} + u^{-1}v) = \det u \Leftrightarrow \det(\text{Id} + u^{-1}v) = 1.$$

$u$  et  $v$  commutent et donc  $u^{-1}$  et  $v$  également car  $uv = vu \Rightarrow u^{-1}uvu^{-1} = u^{-1}vu u^{-1} \Rightarrow vu^{-1} = u^{-1}v$ . Mais alors, puisque  $v$  est nilpotent, l'endomorphisme  $w = u^{-1}v$  l'est également car  $(u^{-1}v)^p = u^{-p}v^p$ .

Il reste donc à calculer  $\det(\text{Id} + w)$  où  $w$  est un endomorphisme nilpotent. On remarque que  $\det(\text{Id} + w) = (-1)^n \chi_w(-1)$ . Il est connu que 0 est l'unique valeur propre d'un endomorphisme nilpotent et donc  $\chi_w = X^n$  puis

$$\det(\text{Id} + w) = (-1)^n \chi_w(-1) = (-1)^n (-1)^n = 1.$$

Le résultat est donc démontré dans le cas où  $u$  est inversible. Si  $u$  n'est pas inversible,  $u + x\text{Id}$  est inversible sauf pour un nombre fini de valeurs de  $x$  et commute toujours avec  $v$ . Donc, pour tout  $x$  sauf peut-être pour un nombre fini,  $\det(u + x\text{Id} + v) = \det(u + x\text{Id})$ . Ces deux polynômes coïncident en une infinité de valeurs de  $x$  et sont donc égaux. Ils prennent en particulier la même valeur en 0 ce qui refournit  $\det(u + v) = \det u$ .

### Exercice n° 8

- Si  $A$  est nilpotente, pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $A^k$  est nilpotente et donc 0 est l'unique valeur propre dans  $\mathbb{C}$  de  $A^k$ . Par suite,  $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\text{Tr}(A^k) = 0$ .
- Réciproquement, supposons que  $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\text{Tr}(A^k) = 0$  et montrons alors que toutes les valeurs propres de  $A$  dans  $\mathbb{C}$  sont nulles. Ceci montrera que le polynôme caractéristique de  $A$  est  $X^n$  et donc que  $A$  est nilpotente d'après le théorème de CAYLEY-HAMILTON.

Soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  les  $n$  valeurs propres (distinctes ou confondues) de  $A$  dans  $\mathbb{C}$ . Pour  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on pose  $S_k = \lambda_1^k + \dots + \lambda_n^k$ . Il s'agit de montrer que :  $(\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, S_k = 0) \Rightarrow (\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_j = 0)$ .

Les  $S_k$ ,  $1 \leq k \leq n$ , sont tous nuls et par combinaisons linéaires de ces égalités, on en déduit que pour tout polynôme  $P$  de degré inférieur ou égal à  $n$  et s'annulant en 0, on a  $P(\lambda_k) = 0$  (1). Il s'agit alors de bien choisir le polynôme  $P$ .

Soit  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Soient  $\mu_1, \dots, \mu_p$  les valeurs propres deux à deux distinctes de  $A$  ( $1 \leq p \leq n$ ). On prend  $P = X \prod_{j \neq i} (X - \mu_j)$

si  $p \geq 2$  et  $P = X$  si  $p = 1$ .  $P$  est bien un polynôme de degré inférieur ou égal à  $n$  et s'annule en 0. L'égalité  $P(\mu_i) = 0$  fournit  $\mu_i = 0$  ce qu'il fallait démontrer.

### Exercice n° 9

Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ .

$$\begin{aligned}
f^k g - g f^k &= f^k g - f^{k-1} g f + f^{k-1} g f - f^{k-2} g f^2 + f^{k-2} g f^2 - \dots - f g f^{k-1} + f g f^{k-1} - g f^k \\
&= \sum_{i=0}^{k-1} (f^{k-i} g f^i - f^{k-i-1} g f^{i+1}) = \sum_{i=0}^{k-1} f^{k-i-1} (f g - g f) f^i = \sum_{i=0}^{k-1} f^{k-i-1} f f^i \\
&= k f^k.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\text{si } fg - gf = f, \text{ alors } \forall k \in \mathbb{N}, f^k g - g f^k = k f^k \quad (*).$$

**1ère solution.** Soit  $\varphi : \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{L}(E)$ .  $\varphi$  est un endomorphisme de  $\mathcal{L}(E)$  et  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\varphi(f^k) = k f^k$ . Si, pour  $h \mapsto hg - gh$

$k \in \mathbb{N}^*$  donné,  $f^k$  n'est pas nul,  $f^k$  est valeur propre de  $\varphi$  associé à la valeur propre  $k$ . Par suite, si aucun des  $f^k$  n'est nul,  $\varphi$  admet une infinité de valeurs propres deux à deux distinctes. Ceci est impossible car  $\dim(\mathcal{L}(E)) < +\infty$ . Donc,  $f$  est nilpotent.

**2ème solution.** Les égalités (\*) peuvent s'écrire  $P(f)g - gP(f) = fP'(f)$ , (\*\*), quand  $P$  est un polynôme de la forme  $X^k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Par linéarité, les égalités (\*\*) sont vraies pour tout polynôme  $P$ .

En particulier, l'égalité (\*\*) est vraie quand  $P$  est  $Q_f$  le polynôme minimal de  $f$  et donc

$$fQ'_f(f) = Q_f(f)g - gQ_f(f) = 0.$$

Le polynôme  $XQ'_f$  est donc un polynôme annulateur de  $f$  et on en déduit que le polynôme  $Q_f$  divise le polynôme  $XQ'_f$ . Plus précisément, si  $p \in \mathbb{N}^*$  est le degré de  $Q_f$ , les polynômes  $pQ_f$  et  $XQ'_f$  ayant mêmes degrés et mêmes coefficients dominants, on en déduit que  $pQ_f = XQ'_f$  ou encore que

$$\frac{Q'_f}{Q_f} = \frac{p}{X}.$$

Par identification à la décomposition en éléments simples usuelles de  $\frac{Q'_f}{Q_f}$ , on en déduit que  $Q_f = X^p$ . En particulier,  $f^p = 0$  et encore une fois  $f$  est nilpotent.

### Exercice n° 10

**1er cas.** Supposons  $\alpha = \beta = 0$  et donc  $uv = vu$ . Puisque  $E$  est un  $\mathbb{C}$ -espace de dimension finie non nulle,  $u$  admet au moins une valeur propre que l'on note  $\lambda$ . Le sous-espace propre  $E_\lambda$  correspondant n'est pas réduit à  $\{0\}$ , est stable par  $u$  et d'autre part stable par  $v$  car  $u$  et  $v$  commutent. On note  $u'$  et  $v'$  les restrictions de  $u$  et  $v$  au sous-espace  $E_\lambda$ .  $u'$  et  $v'$  sont des endomorphismes de  $E_\lambda$ . De nouveau,  $E_\lambda$  est un  $\mathbb{C}$ -espace de dimension finie non nulle et donc  $v'$  admet au moins un vecteur propre  $x_0$ . Par construction,  $x_0$  est un vecteur propre commun à  $u$  et  $v$ .

**2ème cas.** Supposons par exemple  $\alpha \neq 0$ .

$$\begin{aligned}
uv - vu &= \alpha u + \mu v \Leftrightarrow (\alpha u + \beta v) \circ \frac{1}{\alpha} v - \frac{1}{\alpha} v \circ (\alpha u + \beta v) = \alpha u + \beta v \\
&\Leftrightarrow fg - gf = f \text{ en posant } f = \alpha u + \beta v \text{ et } g = \frac{1}{\alpha} v.
\end{aligned}$$

On va chercher un vecteur propre commun à  $u$  et  $v$  dans le noyau de  $f$ . Montrons tout d'abord que  $\text{Kerf}$  n'est pas nul (on sait montrer que  $f$  est en fait nilpotent (n° 9) mais on peut montrer directement une propriété un peu moins forte).

Si  $f$  est inversible, l'égalité  $fg - gf = f$  fournit  $(g + \text{Id}) \circ f = f \circ g$  et donc  $g + \text{Id} = f \circ g \circ f^{-1}$ . Par suite,  $g$  et  $g + \text{Id}$  ont même polynôme caractéristique ou encore, si  $\lambda$  est valeur propre de  $g$  alors  $\lambda + 1$  est encore valeur propre de  $g$ . Mais alors  $\lambda + 2, \lambda + 3, \dots$  sont aussi valeurs propres de  $g$  et  $g$  a une infinité de valeurs propres deux à deux distinctes. Ceci est exclu et donc  $\text{Kerf}$  n'est pas réduit à  $\{0\}$ .

Maintenant, si  $x$  est un vecteur de  $\text{Kerf}$ , on a  $f(g(x)) = g(f(x)) + f(x) = 0$  et  $g(x)$  est dans  $\text{Kerf}$ . Donc  $g$  laisse  $\text{Kerf}$  stable et sa restriction à  $\text{Kerf}$  est un endomorphisme de  $\text{Kerf}$  qui admet au moins une valeur propre et donc au moins un vecteur propre. Ce vecteur est bien un vecteur propre commun à  $f$  et  $g$ .

Enfin si  $x$  est vecteur propre commun à  $f$  et  $g$  alors  $x$  est vecteur propre de  $v = \frac{1}{\alpha} g$  et de  $u = \frac{1}{\alpha} (f - \beta v)$ .  $x$  est un vecteur propre commun à  $u$  et  $v$ .

### Exercice n° 11

1) • E contient  $I_2$  et est inclus dans  $GL_2(\mathbb{R})$ .

• Si A et B sont dans E alors AB est à coefficients entiers et  $\det(AB) = \det A \times \det B = 1$ . Donc AB est dans E.

• Si A est dans E,  $\det(A^{-1}) = 1$  et en particulier  $A^{-1} = \frac{1}{\det A} {}^t \text{com}(A)$  est à coefficients entiers. On en déduit que  $A^{-1}$  est dans E.

Finalement

E est un sous-groupe de  $GL_2(\mathbb{R})$ .

2) Soit A un élément de E tel qu'il existe un entier naturel non nul p tel que  $A^p = I_2$ .

A est diagonalisable dans  $\mathbb{C}$  car annule le polynôme à racines simples  $X^p - 1$ .

A admet deux valeurs propres distinctes ou confondues qui sont des racines p-èmes de 1 dans  $\mathbb{C}$  et puisque A est réelle, on obtient les cas suivants :

**1er cas.** Si  $\text{Sp}A = (1, 1)$ , puisque A est diagonalisable, A est semblable à  $I_2$  et par suite  $A = I_2$ . Dans ce cas,  $A^{12} = I_2$ .

**2ème cas.** Si  $\text{Sp}A = (-1, -1)$ ,  $A = -I_2$  et  $A^{12} = I_2$ .

**3ème cas.** Si  $\text{Sp}A = (1, -1)$  alors A est semblable à  $\text{diag}(1, -1)$  et donc  $A^2 = I_2$  puis encore une fois  $A^{12} = I_2$ .

**4ème cas.** Si  $\text{Sp}A = (e^{i\theta}, e^{-i\theta})$ . Dans ce cas  $\text{Tr}A = 2 \cos \theta$  est un entier ce qui impose  $2 \cos \theta \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ . Les cas  $\cos \theta = 1$  et  $\cos \theta = -1$  ont déjà été étudié.

• Si  $\cos \theta = 0$ ,  $\text{Sp}A = (i, -i)$  et A est semblable à  $\text{diag}(i, -i)$ . Donc  $A^4 = I_2$  puis  $A^{12} = I_2$ .

• Si  $\cos \theta = \pm \frac{1}{2}$ ,  $\text{Sp}A = (j, j^2)$  ou  $\text{Sp}A = (-j, -j^2)$ . Dans le premier cas,  $A^3 = I_2$  et dans le deuxième  $A^6 = I_2$ .

Dans tous les cas  $A^{12} = I_2$ .

### Exercice n° 12

On montre le résultat par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}^*$  le format de A.

• C'est clair pour  $n = 1$ .

• Soit  $n \geq 1$ . Supposons que toute matrice de format n et de trace nulle soit semblable à une matrice de diagonale nulle. Soient A une matrice carrée de format  $n + 1$  et de trace nulle puis f l'endomorphisme de  $\mathbb{K}^{n+1}$  de matrice A dans la base canonique  $(e_1, \dots, e_{n+1})$  de  $\mathbb{K}^{n+1}$ .

Si f est une homothétie de rapport noté k, alors  $0 = \text{Tr}(f) = k(n + 1)$  et donc  $k = 0$  puis  $f = 0$  puis  $A = 0$ . Dans ce cas, A est effectivement semblable à une matrice de diagonale nulle.

Sinon f n'est pas une homothétie et on sait qu'il existe un vecteur u de E tel que la famille  $(u, f(u))$  soit libre (voir exercice n° 25, planche 1). On complète la famille libre  $(u, f(u))$  en une base de E. Le coefficient ligne 1, colonne 1, de la matrice

de f dans cette base est nul. Plus précisément, A est semblable à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & \times & \dots & & \dots & \times \\ 1 & & & & & \\ 0 & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ \vdots & & & & A' & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & & & \end{pmatrix}.$$

Puis  $\text{Tr}A' = \text{Tr}A = 0$  et par hypothèse de récurrence,  $A'$  est semblable à une matrice  $A_1$  de diagonale nulle ou encore il existe  $A_1$  matrice carrée de format n et de diagonale nulle et  $Q \in GL_n(\mathbb{K})$  telle que  $Q^{-1}A'Q = A_1$ .

Mais alors, si on pose  $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & Q & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ , P est inversible car  $\det(P) = 1 \times \det(Q) \neq 0$  et un calcul par blocs montre

que  $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & Q^{-1} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$  puis que  $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & \times & \dots & & \dots & \times \\ \times & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ \vdots & & & & A_1 & \\ \vdots & & & & & \\ \times & & & & & \end{pmatrix}$  est de diagonale nulle.

**Exercice n° 13**

$\det M = \det \begin{pmatrix} A & 4A \\ A & A \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -3A & 4A \\ 0 & A \end{pmatrix}$  ( $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, L_k \leftarrow L_k - L_{n+k}$ ) et donc  $\det M = \det(A)\det(-3A) = (-3)^n(\det A)^2$ .

$$\det M = (-3)^n(\det A)^2.$$

L'idée de l'étude de  $M$  qui suit vient de l'étude de la matrice de format 2,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

Une diagonalisation rapide amène à  $B = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \times \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ . Soit alors  $P$  la matrice de format  $2n$  définie par blocs par  $P = \begin{pmatrix} -2I_n & 2I_n \\ I_n & I_n \end{pmatrix}$ . Un calcul par blocs montre que  $P$  est inversible et que  $P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -I_n & 2I_n \\ I_n & 2I_n \end{pmatrix}$  puis que

$$P^{-1}MP = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -I_n & 2I_n \\ I_n & 2I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 4A \\ A & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2I_n & 2I_n \\ I_n & I_n \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} A & -2A \\ 3A & 6A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2I_n & 2I_n \\ I_n & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A & 0 \\ 0 & 3A \end{pmatrix}.$$

On pose  $N = \begin{pmatrix} -A & 0 \\ 0 & 3A \end{pmatrix}$ . Puisque les matrices  $M$  et  $N$  sont semblables,  $M$  et  $N$  ont même polynôme caractéristique et de plus  $M$  est diagonalisable si et seulement si  $N$  l'est.

Un calcul par blocs fournit  $\chi_M = \chi_{-A} \times \chi_{3A}$ . Donc, si  $\text{Sp}(A) = (\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ , alors  $\text{Sp}(M) = (-\lambda_i)_{1 \leq i \leq n} \cup (3\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ .

Cherchons les vecteurs propres  $Z$  de  $N$  sous la forme  $Z = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$  où  $X$  et  $Y$  sont des vecteurs colonnes de format  $n$ . Soit  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

$$NZ = \lambda Z \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -A & 0 \\ 0 & 3A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \Leftrightarrow -AX = \lambda X \text{ et } 3AY = \lambda Y.$$

Par suite

$$Z \text{ est vecteur propre de } N \text{ associé à } \lambda \Leftrightarrow (X \neq 0 \text{ ou } Y \neq 0) \text{ et } (X \in \text{Ker}(A + \lambda I) \text{ et } Y \in \text{Ker}\left(A - \frac{\lambda}{3}I\right)).$$

Une discussion suivant  $\lambda$  s'en suit :

**1er cas.** Si  $-\lambda$  et  $\frac{\lambda}{3}$  ne sont pas valeurs propres de  $A$  alors  $\lambda$  n'est pas valeur propre de  $M$ .

**2ème cas.** Si  $-\lambda$  est dans  $\text{Sp}A$  et  $\frac{\lambda}{3}$  n'y est pas, alors  $\lambda$  est valeur propre de  $M$ . Le sous-espace propre associé est l'ensemble des  $P \begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2X \\ X \end{pmatrix}$  où  $X$  décrit  $\text{Ker}(A + \lambda I)$ . La dimension de  $E_\lambda$  est alors  $\dim(\text{Ker}(A + \lambda I))$ .

**3ème cas.** Si  $-\lambda$  n'est pas dans  $\text{Sp}A$  et  $\frac{\lambda}{3}$  y est, alors  $\lambda$  est valeur propre de  $M$ . Le sous-espace propre associé est l'ensemble des  $P \begin{pmatrix} 0 \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2Y \\ Y \end{pmatrix}$  où  $Y$  décrit  $\text{Ker}\left(A - \frac{\lambda}{3}I\right)$ . La dimension de  $E_\lambda$  est alors  $\dim\left(\text{Ker}\left(A - \frac{\lambda}{3}I\right)\right)$ .

**4ème cas.** Si  $-\lambda$  est dans  $\text{Sp}A$  et  $\frac{\lambda}{3}$  aussi, alors  $\lambda$  est valeur propre de  $M$ . Le sous-espace propre associé est l'ensemble des  $P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2X + 2Y \\ X + Y \end{pmatrix}$  où  $X$  décrit  $\text{Ker}(A + \lambda I)$  et  $Y$  décrit  $\text{Ker}\left(A - \frac{\lambda}{3}I\right)$ . La dimension de  $E_\lambda$  est alors  $\dim(\text{Ker}(A + \lambda I)) + \dim\left(\text{Ker}\left(A - \frac{\lambda}{3}I\right)\right)$ .

Dans tous les cas,  $\dim(E_\lambda(M)) = \dim(E_{-\lambda}(A)) + \dim(E_{\lambda/3}(A))$  (et en particulier  $\dim(\text{Ker}M) = 2\dim(\text{Ker}A)$ ). Comme les applications  $\lambda \mapsto -\lambda$  et  $\lambda \mapsto \frac{\lambda}{3}$  sont des bijections de  $\mathbb{C}$  sur lui-même,



$$\begin{aligned}
A \text{ est diagonalisable} &\Leftrightarrow \sum_{\lambda \in \mathbb{C}} \dim(E_\lambda(A)) = n \\
&\Leftrightarrow \sum_{\lambda \in \mathbb{C}} \dim(E_\lambda(A)) + \sum_{\lambda \in \mathbb{C}} \dim(E_{-\lambda}(A)) = 2n \\
&\Leftrightarrow \sum_{\lambda \in \mathbb{C}} \dim(E_{-\lambda}(A)) + \sum_{\lambda \in \mathbb{C}} \dim(E_{\lambda/3}(A)) = 2n \\
&\Leftrightarrow M \text{ est diagonalisable.}
\end{aligned}$$

### Exercice n° 14

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X & -b & \dots & -b \\ -a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -b \\ -a & \dots & -a & X \end{vmatrix}. \text{ Soit } f(x) = \begin{vmatrix} X+x & -b+x & \dots & -b+x \\ -a+x & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -b+x \\ -a+x & \dots & -a+x & X+x \end{vmatrix}.$$

$f$  est un polynôme en  $x$ . Par  $n$  linéarité du déterminant,  $f(x)$  est somme de  $2^n$  déterminants dont  $2^n - (n+1)$  sont nuls car contiennent deux colonnes de  $x$ . Les déterminants restant contiennent au plus une colonne de  $x$  et sont donc de degré inférieur ou égal à 1 en  $x$ .  $f$  est donc une fonction affine. Il existe donc deux nombres  $\alpha$  et  $\beta$  tels que  $\forall x \in \mathbb{C}, f(x) = \alpha x + \beta$ .

Les égalités  $f(a) = (X-a)^n$  et  $f(b) = (X-b)^n$  fournissent  $\begin{cases} \alpha a + \beta = (X-a)^n \\ \alpha b + \beta = (X-b)^n \end{cases}$  et comme  $a \neq b$ , les formules de CRAMER fournissent

$$\chi_A = f(0) = \beta = \frac{1}{b-a} (b(X-a)^n - a(X-b)^n).$$

Soit  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

$$\lambda \text{ valeur propre de } A \Rightarrow \chi_A(\lambda) = 0 \Rightarrow \left( \frac{\lambda-a}{\lambda-b} \right)^n = \frac{a}{b} \Rightarrow \left| \frac{\lambda-a}{\lambda-b} \right| = \left| \frac{a}{b} \right|^{1/n}.$$

Soient  $M$  le point du plan d'affixe  $\lambda$ ,  $A$  le point du plan d'affixe  $a$  et  $B$  le point du plan d'affixe  $b$  puis  $k = \left| \frac{a}{b} \right|^{1/n}$ .  $k$  est un réel strictement positif et distinct de 1. On peut donc poser  $I = \text{bar}(A(1), B(-k))$  et  $J = \text{bar}(A(1), B(k))$ .

$$\begin{aligned}
\lambda \text{ valeur propre de } A &\Rightarrow MA = kMB \Rightarrow MA^2 - k^2MB^2 = 0 \Rightarrow (\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB}) (\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB}) = 0 \\
&\Rightarrow (1-k)\overrightarrow{MI} \cdot (1+k)\overrightarrow{MJ} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MJ} = 0 \\
&\Rightarrow M \text{ est sur le cercle de diamètre } [I, J] \text{ (cercles d'APOLLONIUS (de Perga)).}
\end{aligned}$$

### Exercice n° 15

1) Les hypothèses fournissent  $AU = U$  où  $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$  et donc 1 est valeur propre de  $A$ .

2) a) Soient  $\lambda$  une valeur propre de  $A$  et  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{C})$  un vecteur propre associé.

$$AX = \lambda X \Rightarrow \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j = \lambda x_i \Rightarrow \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, |\lambda x_i| \leq \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| |x_j|$$

$$\Rightarrow \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, |\lambda x_i| \leq \left( \sum_{j=1}^n a_{i,j} \right) \text{Max}\{|x_j|, 1 \leq j \leq n\}$$

$$\Rightarrow \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, |\lambda| |x_i| \leq \text{Max}\{|x_j|, 1 \leq j \leq n\}.$$

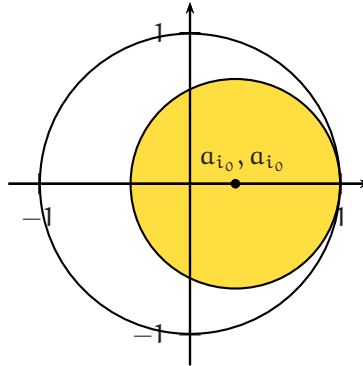
On choisit alors pour  $i$  un indice  $i_0$  tel que  $|x_{i_0}| = \text{Max}\{|x_j|, 1 \leq j \leq n\}$ . Puisque  $X$  est non nul, on a  $|x_{i_0}| > 0$ . On obtient

$$|\lambda| |x_{i_0}| \leq |x_{i_0}| \text{ et donc } |\lambda| \leq 1 \text{ puisque } |x_{i_0}| > 0.$$

b) Plus précisément,

$$|\lambda - a_{i_0, i_0}| |x_{i_0}| = \left| \sum_{j \neq i_0} a_{i_0, j} x_j \right| \leq \sum_{j \neq i_0} a_{i_0, j} |x_j| \leq \left( \sum_{j \neq i_0} a_{i_0, j} \right) |x_{i_0}| = (1 - a_{i_0, i_0}) |x_{i_0}|$$

et donc  $\forall \lambda \in \text{Sp}A$ ,  $|\lambda - a_{i_0, i_0}| \leq 1 - a_{i_0, i_0}$  ce qui signifie que les valeurs propres de  $A$  appartiennent au disque de centre  $a_{i_0, i_0}$  et de rayon  $1 - a_{i_0, i_0}$ . Ce disque est tangent intérieurement au cercle de centre  $(1, 0)$  et de rayon 1 en le point  $(1, 0)$ .



### Exercice n° 16

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .  $A$  est antisymétrique si et seulement si  ${}^tA = -A$ . Dans ce cas

$$\chi_A(X) = \det(XI - A) = \det({}^t(XI - A)) = \det(XI + A) = (-1)^n \det(-XI - A) = (-1)^n \chi_A(-X).$$

Ainsi,  $\chi_A$  a la parité de  $n$ .

### Exercice n° 17

Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  de matrice  $A$  dans la base canonique  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $\mathbb{R}^n$ .  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $f(e_i) = e_{n+1-i}$  et donc  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $f^2(e_i) = e_i$ . Donc  $f$  est une symétrie distincte de l'identité et en particulier  $\text{Sp}A = \{-1, 1\}$  et  $f$  est diagonalisable. On en déduit que  $A$  est diagonalisable dans  $\mathbb{R}$ .

### Exercice n° 18

1)  $J^n = I$ .  $J$  annule le polynôme  $X^n - 1$  qui est à racines simples dans  $\mathbb{C}$  et donc  $J$  est diagonalisable dans  $\mathbb{C}$ .

Les valeurs propres de  $J$  sont à choisir parmi les racines  $n$ -èmes de 1 dans  $\mathbb{C}$ . On pose  $\omega = e^{2i\pi/n}$ . Vérifions que  $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ ,  $\omega^k$  est valeur propre de  $J$ .

Soient  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$  et  $X = (x_j)_{1 \leq j \leq n}$  un élément de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ .

$$JX = \omega^k X \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \omega^k x_1 \\ x_3 = \omega^k x_2 \\ \vdots \\ x_n = \omega^k x_{n-1} \\ x_1 = \omega^k x_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \omega^k x_1 \\ x_3 = (\omega^k)^2 x_1 \\ \vdots \\ x_n = (\omega^k)^{n-1} x_1 \\ x_1 = (\omega^k)^n x_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \omega^k x_1 \\ x_3 = (\omega^k)^2 x_1 \\ \vdots \\ x_n = (\omega^k)^{n-1} x_1 \end{cases}$$

et donc

$$JX = \omega^k X \Leftrightarrow X \in \text{Vect}(U_k) \text{ où } U_k = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^k \\ (\omega^k)^2 \\ \vdots \\ (\omega^k)^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Donc  $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ ,  $\omega^k$  est valeur propre de  $J$ . Les valeurs propres de  $J$  sont les  $n$  racines  $n$ -èmes de 1. Ces valeurs propres sont toutes simples. Le sous espace propre associé à  $\omega^k$ ,  $0 \leq k \leq n-1$ , est la droite vectorielle  $D_k = \text{Vect}(U_k)$ .

Soit  $P$  la matrice de VANDERMONDE des racines  $n$ -èmes de l'unité c'est-à-dire  $P = (\omega^{(j-1)(k-1)})_{0 \leq j, k \leq n-1}$  puis

$D = \text{diag}(1, \omega, \dots, \omega^{n-1})$ , alors on a déjà vu que  $P^{-1} = \frac{1}{n} \overline{P}$  (planche 3, exercice n° 16) et on a

$$J = PDP^{-1} \text{ avec } D = \text{diag}(\omega^j)_{1 \leq j \leq n}, P = (\omega^{(j-1)(k-1)})_{1 \leq j, k \leq n} \text{ et } P^{-1} = \frac{1}{n} \overline{P} \text{ avec } \omega = e^{2i\pi/n}.$$

**Remarque.** La seule connaissance de  $D$  suffit pour le 2).

2) Soit  $A$  la matrice de l'énoncé.

$$A = a_0 I + a_1 J + a_2 J^2 + \dots + a_{n-1} J^{n-1} = Q(J) \text{ où } Q = a_0 + a_1 X + \dots + a_{n-1} X^{n-1}.$$

D'après 1),  $A = P \times Q(D) \times P^{-1}$  et donc  $A$  est semblable à la matrice  $\text{diag}(Q(1), Q(\omega), \dots, Q(\omega^{n-1}))$ . Par suite,  $A$  a même déterminant que la matrice  $\text{diag}(Q(1), Q(\omega), \dots, Q(\omega^{n-1}))$ . D'où la valeur du déterminant circulant de l'énoncé :

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_2 & & \ddots & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_0 \end{vmatrix} = \prod_{k=0}^{n-1} \left( \sum_{j=0}^{n-1} e^{2i(j-1)(k-1)\pi/n} a_j \right).$$

### Exercice n° 19

1) Soit  $\sigma \in S_n$ .

$$\det(P_\sigma) = \sum_{\sigma' \in S_n} \varepsilon(\sigma') p_{\sigma'(1),1} \dots p_{\sigma'(n),n} = \sum_{\sigma' \in S_n} \varepsilon(\sigma') \delta_{\sigma'(1),\sigma(1)} \dots \delta_{\sigma'(n),\sigma(n)} = \varepsilon(\sigma),$$

car  $\delta_{\sigma'(1),\sigma(1)} \dots \delta_{\sigma'(n),\sigma(n)} \neq 0 \Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sigma'(i) = \sigma(i) \Leftrightarrow \sigma' = \sigma$ .

$$\forall \sigma \in S_n, \det(P_\sigma) = \varepsilon(\sigma).$$

2) a) Soit  $(\sigma, \sigma') \in S_n^2$ . Soit  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ . Le coefficient ligne  $i$ , colonne  $j$ , de la matrice  $P_\sigma \times P_{\sigma'}$  vaut

$$\sum_{k=1}^n \delta_{i,\sigma(k)} \delta_{k,\sigma'(j)}.$$

Dans cette somme, si  $k \neq \sigma'(j)$ , le terme correspondant est nul et quand  $k = \sigma'(j)$ , le terme correspondant vaut  $\delta_{i,\sigma(\sigma'(j))}$ . Finalement, le coefficient ligne  $i$ , colonne  $j$ , de la matrice  $P_\sigma \times P_{\sigma'}$  vaut  $\delta_{i,\sigma(\sigma'(j))}$  qui est encore le coefficient ligne  $i$ , colonne  $j$ , de la matrice  $P_{\sigma \circ \sigma'}$ .

$$\forall (\sigma, \sigma') \in S_n^2, P_\sigma \times P_{\sigma'} = P_{\sigma \circ \sigma'}.$$

b) Montrons que  $G$  est un sous-groupe du groupe  $(GL_n(\mathbb{R}), \times)$ .  $G$  contient  $I_n = P_{\text{Id}}$  et d'autre part,  $G$  est contenu dans  $GL_n(\mathbb{R})$  d'après 1).  $G$  est stable pour  $\times$  d'après 2) et pour le passage à l'inverse car pour tout  $\sigma \in S_n, (P_\sigma)^{-1} = P_{\sigma^{-1}} \in G$  (toujours d'après 2)). Donc

$$(G, \times) \text{ est un sous-groupe de } (GL_n(\mathbb{R}), \times).$$

Soit l'application  $\varphi : (S_n, \circ) \rightarrow (G, \times)$ .  $\varphi$  est un morphisme de groupes d'après 2), surjectif par construction. De plus,

$$\sigma \in \text{Ker}(\varphi) \Leftrightarrow P_\sigma = I_n \Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sigma(i) = i \Leftrightarrow \sigma = \text{Id}_{\llbracket 1, n \rrbracket}.$$

Donc  $\text{Ker}(\varphi) = \{\text{Id}\}$  puis  $\varphi$  est injectif et finalement  $\varphi$  est un isomorphisme du groupe  $(S_n, \circ)$  sur le groupe  $(G, \times)$ .

3) Le coefficient ligne  $i$ , colonne  $j$ , de la matrice  $AP_\sigma$  vaut

$$\sum_{k=1}^n a_{i,k} \delta_{k,\sigma(j)} = a_{i,\sigma(j)}.$$

Par suite, si  $C_1, \dots, C_n$  désignent les colonnes de la matrice  $A$ , la matrice  $AP_\sigma$  est la matrice dont les colonnes sont  $C_{\sigma(1)}, \dots, C_{\sigma(n)}$ .

4) Commençons par trouver le polynôme caractéristique de la matrice associée à un cycle  $c$  de longueur  $\ell$  ( $2 \leq \ell \leq n$ ). Soit  $f_c$  l'endomorphisme de  $E = \mathbb{R}^n$  de matrice  $P_c$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ . Il existe une base de  $E$  dans laquelle la matrice de  $f_c$  est  $\begin{pmatrix} J_\ell & 0_{\ell, n-\ell} \\ 0_{n-\ell, \ell} & I_{n-\ell} \end{pmatrix}$  où la matrice  $J_\ell$  est la matrice du n° 18. Le polynôme caractéristique  $\chi_{P_c}$  de  $P_c$  est donc  $(X-1)^{n-\ell}(X^\ell-1)$  (voir n° 18).

Soit maintenant  $\sigma \in S_n$ . On note  $f_\sigma$  l'endomorphisme de  $E = \mathbb{R}^n$  de matrice  $P_\sigma$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ .  $\sigma$  se décompose de manière unique à l'ordre près des facteurs en produit de cycles à supports disjoints, ces cycles commutant deux à deux.

Posons donc  $\sigma = c_1 \circ \dots \circ c_p$ ,  $p \geq 1$ , où les  $c_i$ ,  $1 \leq i \leq p$ , sont des cycles à supports disjoints, et notons  $\ell_i$  la longueur du

cycle  $c_i$ ,  $1 \leq i \leq p$ . Il existe une base de  $E$  dans laquelle la matrice de  $f_\sigma$  est  $\begin{pmatrix} J_{\ell_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & J_{\ell_p} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & I_k \end{pmatrix}$  où  $k = n - \ell_1 - \dots - \ell_p$

est le nombre de points fixes de  $\sigma$ .

Le polynôme caractéristique cherché est donc  $\chi_{P_\sigma} = (X^{\ell_1} - 1) \dots (X^{\ell_p} - 1)(X - 1)^{n - \ell_1 - \dots - \ell_p}$ . On en déduit les valeurs propres de  $P_\sigma$ .

**Exercice n° 20**

Posons  $\chi_f = \prod_{k=1}^p (X - \lambda_k)^{\alpha_k}$  où  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  sont les valeurs propres deux à deux distinctes de  $f$ .

Soit  $E'_k = \text{Ker}(f - \lambda_k \text{Id})^{\alpha_k}$  ( $E'_k$  s'appelle le sous-espace caractéristique de  $f$  associé à la valeur propre  $\lambda_k$ ,  $1 \leq k \leq p$ ). D'après le théorème de décomposition des noyaux,  $E = E'_1 \oplus \dots \oplus E'_p$ . De plus, si  $f_k$  est la restriction de  $f$  à  $E'_k$  alors  $f_k$  est un endomorphisme de  $E'_k$  (car  $f$  et  $(f - \lambda_k \text{Id})^{\alpha_k}$  commutent).

On note que  $(f_k - \lambda_k \text{Id})^{\alpha_k} = 0$  et donc  $\lambda_k$  est l'unique valeur propre de  $f_k$  car toute valeur propre de  $f_k$  est racine du polynôme annulateur  $(X - \lambda_k)^{\alpha_k}$ .

**Existence de  $d$  et  $n$ .** On définit  $d$  par ses restrictions  $d_k$  aux  $E'_k$ ,  $1 \leq k \leq p$  :  $d_k$  est l'homothétie de rapport  $\lambda_k$ . Puis on définit  $n$  par  $n = f - d$ .

$d$  est diagonalisable car toute base de  $E$  adaptée à la décomposition  $E = E'_1 \oplus \dots \oplus E'_p$  est une base de vecteurs propres de  $d$ . De plus,  $f = d + n$ .

Soit  $n_k$  la restriction de  $n$  à  $E'_k$ . On a  $n_k = f_k - \lambda_k \text{Id}_{E'_k}$  et par définition de  $E'_k$ ,  $n_k^{\alpha_k} = 0$ . Mais alors, si on pose  $\alpha = \text{Max}\{\alpha_1, \dots, \alpha_p\}$ , on a  $n_k^\alpha = 0$  pour tout  $k$  de  $\{1, \dots, p\}$  et donc  $n^\alpha = 0$ . Ainsi,  $n$  est nilpotent. Enfin, pour tout  $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ ,  $n_k$  commute avec  $d_k$  car  $d_k$  est une homothétie et donc  $nd = dn$ .

**Unicité de  $d$  et  $n$ .** Supposons que  $f = d + n$  avec  $d$  diagonalisable,  $n$  nilpotent et  $nd = dn$ .

$d$  commute avec  $n$  et donc avec  $f$  car  $df = d^2 + dn = d^2 + nd = fd$ . Mais alors,  $n = f - d$  commute également avec  $f$ .  $d$  et  $n$  laissent donc stables les sous-espaces caractéristiques  $E'_k$ ,  $1 \leq k \leq p$  de  $f$ . Pour  $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , on note  $d_k$  et  $n_k$  les restrictions de  $d$  et  $n$  à  $E'_k$ .

Soient  $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$  puis  $\mu$  une valeur propre de  $d_k$ . D'après l'exercice n° 7,

$$\det(f_k - \mu \text{Id}) = \det(d_k - \mu \text{Id} + n) = \det(d_k - \mu \text{Id}) = 0,$$

car  $d_k - \mu \text{Id}$  n'est pas inversible. On en déduit que  $f_k - \mu \text{Id}$  n'est pas inversible et donc que  $\mu$  est valeur propre de  $f_k$ . Puisque  $\lambda_k$  est l'unique valeur propre de  $f_k$ , on a donc  $\mu = \lambda_k$ . Ainsi,  $\lambda_k$  est l'unique valeur propre de  $d_k$  et puisque  $d_k$  est diagonalisable (voir exercice n° 36), on a nécessairement  $d_k = \lambda_k \text{Id}_{E'_k}$  puis  $n_k = f_k - \lambda_k \text{Id}_{E'_k}$ . Ceci montre l'unicité de  $d$  et  $n$ .

**Exercice n° 21**

On cherche une matrice  $A$  de format 4 dont le polynôme caractéristique est  $X^4 - 3X^3 + X^2 - 1$ . La matrice compagnon

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

convient (voir planche 4, exercice n° 15) et le théorème de CAYLEY-HAMILTON montre que

$$A^4 - 3A^3 + A^2 - I_4 = 0.$$

**Exercice n° 22**

Soit  $A$  la matrice de l'énoncé.  $\det A$  est le produit des valeurs propres de  $A$ .

- Si  $b = 0$ ,  $\det A = a^n$ .
- Si  $b \neq 0$ ,  $\text{rg}(A - (a - b)I) = 1$  ou encore  $\dim(\text{Ker}(A - (a - b)I)) = n - 1$ . Par suite,  $a - b$  est valeur propre d'ordre  $n - 1$  au moins. On obtient la valeur propre manquante  $\lambda$  par la trace de  $A$  :  $(n - 1)(a - b) + \lambda = na$  et donc  $\lambda = a + (n - 1)b$ . Finalement  $\det A = (a - b)^{n-1}(a + (n - 1)b)$  ce qui reste vrai quand  $b = 0$ .

$$\begin{vmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{vmatrix} = (a - b)^{n-1}(a + (n - 1)b).$$

### Exercice n° 23

$A$  est de format 2 et donc, soit  $a$  deux valeurs propres distinctes et est dans ce cas diagonalisable dans  $\mathbb{C}$ , soit  $a$  une valeur propre double  $\lambda$  non nulle car  $\text{Tr}A = 2\lambda \neq 0$ .

Dans ce dernier cas,  $A^2$  est diagonalisable et est donc semblable à  $\text{diag}(\lambda^2, \lambda^2) = \lambda^2 I$ . Par suite,  $A^2 = \lambda^2 I$ . Ainsi,  $A$  annule le polynôme  $X^2 - \lambda^2 = (X - \lambda)(X + \lambda)$  qui est scindé sur  $\mathbb{R}$  à racines simples. Dans ce cas aussi,  $A$  est diagonalisable.

### Exercice n° 24

1) Soit  $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . Soit  $F$  une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$ , on a  $(\varphi(f))(x) = \frac{F(x) - F(0)}{x - 0}$ .

$F$  est continue sur  $\mathbb{R}$  donc  $\varphi(f)$  est continue sur  $\mathbb{R}^*$ . De plus,  $F$  étant dérivable en 0

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} (\varphi(f))(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = F'(0) = f(0) = (\varphi(f))(0).$$

Finalement  $\varphi(f)$  est continue sur  $\mathbb{R}$ . Ainsi,  $\varphi$  est une application de  $E$  dans  $E$ . La linéarité de  $\varphi$  est claire et finalement

$$\varphi \in \mathcal{L}(C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})).$$

2) Si  $f$  est dans  $\text{Ker}(\varphi)$  alors  $f(0) = 0$  et pour tout  $x$  non nul,  $\int_0^x f(t) dt = 0$ . Par dérivation on obtient  $\forall x \in \mathbb{R}^*$ ,  $f(x) = 0$  ce qui reste vrai pour  $x = 0$  et donc  $f = 0$ . Finalement  $\text{Ker}(\varphi) = \{0\}$  et  $\varphi$  est injective.

$\varphi$  n'est pas surjective car pour toute  $f \in E$ ,  $\varphi(f)$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^*$ . Mais alors par exemple, l'application  $g : x \mapsto |x - 1|$  est dans  $E$  mais n'est pas dans  $\text{Im}(\varphi)$ .

$$\varphi \text{ est injective et n'est pas surjective.}$$

3) On cherche  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $f$  continue sur  $\mathbb{R}$  et non nulle telle que  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $(\varphi(f))(x) = \lambda f(x)$ . D'après la question précédente, 0 n'est pas valeur propre de  $\varphi$  et donc nécessairement  $\lambda \neq 0$ .

Pour  $x = 0$ , nécessairement  $f(0) = \lambda f(0)$  et donc ou bien  $\lambda = 1$  ou bien  $f(0) = 0$ .

On doit avoir pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$ ,  $f(x) = \frac{1}{\lambda x} \int_0^x f(t) dt$ .  $f$  est nécessairement dérivable sur  $\mathbb{R}^*$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$ , on a

$$\int_0^x f(t) dt = \lambda x f(x) \text{ et par dérivation, on obtient pour } x \in \mathbb{R}^*,$$

$$f(x) = \lambda(xf'(x) + f(x)).$$

Soit  $I$  l'un des deux intervalles  $] -\infty, 0[$  ou  $]0, +\infty[$ .

$$\begin{aligned} \forall x \in I, f(x) = \lambda(xf'(x) + f(x)) &\Rightarrow \forall x \in I, f'(x) + \frac{\lambda - 1}{\lambda x} f(x) = 0 \\ &\Rightarrow \forall x \in I, e^{\frac{(\lambda - 1) \ln |x|}{\lambda}} f'(x) + \frac{\lambda - 1}{\lambda x} e^{\frac{(\lambda - 1) \ln |x|}{\lambda}} f(x) = 0 \\ &\Rightarrow \forall x \in I, \left( |x|^{\frac{\lambda - 1}{\lambda}} f \right)'(x) = 0 \\ &\Rightarrow \exists K \in \mathbb{R} / \forall x \in I, |x|^{\frac{\lambda - 1}{\lambda}} f(x) = K \Rightarrow \exists K \in \mathbb{R} / \forall x \in I, f(x) = K |x|^{\frac{1 - \lambda}{\lambda}}. \end{aligned}$$

**1er cas.** Si  $\lambda \in ] -\infty, 0[ \cup ]1, +\infty[$  alors  $\frac{1 - \lambda}{\lambda} < 0$  et donc  $\lim_{x \rightarrow 0} |x|^{\frac{1 - \lambda}{\lambda}} = +\infty$ . La fonction  $x \mapsto K |x|^{\frac{1 - \lambda}{\lambda}}$  ne peut donc être la restriction à  $I$  d'une fonction continue sur  $\mathbb{R}$  que dans le cas  $K = 0$ . Ceci fournit  $f_{/]-\infty, 0[} = 0$ ,  $f_{/]0, +\infty[} = 0$  et  $f(0) = 0$  par continuité en 0. Donc  $f$  est nécessairement nulle et  $\lambda$  n'est pas valeur propre de  $\varphi$  dans ce cas.

**2ème cas.** Si  $\lambda = 1$ , les restrictions de  $f$  à  $] -\infty, 0[$  ou  $]0, +\infty[$  sont constantes et donc, par continuité de  $f$  en  $0$ ,  $f$  est constante sur  $\mathbb{R}$ . Réciproquement, les fonctions constantes  $f$  vérifient bien  $\varphi(f) = f$ . Ainsi,  $1$  est valeur propre de  $f$  et le sous-espace propre associé est constitué des fonctions constantes.

**3ème cas.** Si  $\lambda \in ]0, 1[$ , nécessairement  $\exists(K_1, K_2) \in \mathbb{R}^2 / \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} K_1 x^{\frac{1}{\lambda}-1} & \text{si } x \geq 0 \\ K_2 (-x)^{\frac{1}{\lambda}-1} & \text{si } x < 0 \end{cases}$ .  $f$  ainsi définie est bien

continue sur  $\mathbb{R}$ . Calculons alors  $\varphi(f)$ .

$(\varphi(f))(0) = f(0) = 0$  puis si  $x > 0$ ,

$$(\varphi(f))(x) = \frac{1}{x} \int_0^x K_1 t^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} dt = \frac{\lambda K_1}{x} x^{\frac{1}{\lambda}} = \lambda K_1 x^{\frac{1}{\lambda}-1} = \lambda f(x)$$

et de même si  $x < 0$ . Enfin,  $(\varphi(f))(0) = 0 = \lambda f(0)$ . Finalement  $\varphi(f) = \lambda f$ .  $\lambda$  est donc valeur propre de  $\varphi$  ( $K_1 = K_2 = 1$  fournit une fonction non nulle) et le sous-espace propre associé à  $\lambda$  est de dimension 2. Une base de ce sous-espace est

$$(f_1, f_2) \text{ où } \forall x \in \mathbb{R}, f_1(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{\lambda}-1} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \text{ et } f_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq 0 \\ (-x)^{\frac{1}{\lambda}-1} & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Finalement

$$\text{Sp}(\varphi) = ]0, 1].$$

**Exercice n° 25**

Trouvons un polynôme scindé à racines simples annulant  $f$ .

Le polynôme  $P = X(X - \lambda)(X - \mu) = X^3 - (\lambda + \mu)X^2 + \lambda\mu X$  est annulateur de  $f$ . En effet,

$$\begin{aligned} P(f) &= f^3 - (\lambda + \mu)f^2 + \lambda\mu f = (\lambda^3 - (\lambda + \mu)\lambda^2 + (\lambda\mu)\lambda)u + (\mu^3 - (\lambda + \mu)\mu^2 + (\lambda\mu)\mu)v \\ &= P(\lambda)u + P(\mu)v = 0. \end{aligned}$$

- Si  $\lambda$  et  $\mu$  sont distincts et non nuls,  $P$  est un polynôme scindé à racines simples annulateur de  $f$  et donc  $f$  est diagonalisable.
- Si  $\lambda = \mu = 0$ , alors  $f = 0$  et donc  $f$  est diagonalisable.
- Si par exemple  $\lambda \neq 0$  et  $\mu = 0$ ,  $f^2 = \lambda^2 u = \lambda f$  et le polynôme  $P = X(X - \lambda)$  est scindé à racines simples et annulateur de  $f$ . Dans ce cas aussi  $f$  est diagonalisable.
- Enfin si  $\lambda = \mu \neq 0$ ,  $f^2 = \lambda^2(u + v) = \lambda f$  et de nouveau  $P = X(X - \lambda)$  est scindé à racines simples et annulateur de  $f$ .

Dans tous les cas,  $f$  est diagonalisable.

**Exercice n° 26**

Posons  $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . On a  $N^2 = E_{1,3}$  et  $N^3 = 0$ . Si  $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$  est une matrice carrée vérifiant  $X^2 = N$ , alors

$X^6 = 0$ . Donc  $X$  est nilpotente et, puisque  $X$  est de format 3, on sait que  $X^3 = 0$ . Mais alors  $N^2 = X^4 = 0$  ce qui n'est pas. L'équation proposée n'a pas de solution.

**Exercice n° 27**

Montrons le résultat par récurrence sur  $n = \dim E \geq 1$ .

- Si  $n = 1$ , c'est clair.
- Soit  $n \geq 1$ . Supposons que deux endomorphismes d'un  $\mathbb{C}$ -espace de dimension  $n$  qui commutent soient simultanément trigonalisables.

Soient  $f$  et  $g$  deux endomorphismes d'un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension  $n + 1$  tels que  $fg = gf$ .

$f$  et  $g$  ont au moins un vecteur propre en commun. En effet,  $f$  admet au moins une valeur propre  $\lambda$ . Soit  $E_\lambda$  le sous-espace propre de  $f$  associé à  $\lambda$ .  $g$  commute avec  $f$  et donc laisse stable  $E_\lambda$ . La restriction de  $g$  à  $E_\lambda$  est un endomorphisme de  $E_\lambda$  qui est de dimension finie non nulle. Cette restriction admet donc une valeur propre et donc un vecteur propre. Ce vecteur est un vecteur propre commun à  $f$  et  $g$ .

Commençons à construire une base de trigonalisation simultanée de  $f$  et  $g$ . Soit  $x$  un vecteur propre commun à  $f$  et  $g$ . On complète la famille libre  $(x)$  en une base  $\mathcal{B} = (x, \dots)$  de  $E$ . Dans la base  $\mathcal{B}$ , les matrices  $M$  et  $N$  de  $f$  et  $g$  s'écrivent

respectivement  $M = \begin{pmatrix} \lambda & \times \\ 0 & M_1 \end{pmatrix}$  et  $N = \begin{pmatrix} \mu & \times \\ 0 & N_1 \end{pmatrix}$  où  $M_1$  et  $N_1$  sont de format  $n$ . Un calcul par blocs montre que

$M_1$  et  $N_1$  commutent ou encore si  $f_1$  et  $g_1$  sont les endomorphismes de  $\mathbb{C}^n$  de matrices  $M_1$  et  $N_1$  dans la base canonique de  $\mathbb{C}^n$ ,  $f_1$  et  $g_1$  commutent. Par hypothèse de récurrence,  $f_1$  et  $g_1$  sont simultanément trigonalisables. Donc il existe une matrice inversible  $P_1$  de format  $n$  et deux matrices triangulaires supérieures  $T_1$  et  $T'_1$  de format  $n$  telles que  $P_1^{-1}M_1P_1 = T_1$  et  $P_1^{-1}N_1P_1 = T'_1$ .

Soit  $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_1 \end{pmatrix}$ .  $P$  est inversible de format  $n + 1$  car  $\det P = \det P_1 \neq 0$  et un calcul par blocs montre que  $P^{-1}MP$  et  $P^{-1}NP$  sont triangulaires supérieures.

$P$  est donc la matrice de passage de la base  $\mathcal{B}$  à une base de trigonalisation simultanée de  $f$  et  $g$ .

### Exercice n° 28

Soit  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  la famille des valeurs propres de  $A$ . On a donc  $\chi_A = (X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_n)$ .

$$\begin{aligned} \chi_A(B) \text{ inversible} &\Leftrightarrow (B - \lambda_1 I) \dots (B - \lambda_n I) \text{ inversible} \\ &\Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, B - \lambda_k I \text{ inversible (car } \det((B - \lambda_1 I) \dots (B - \lambda_n I)) = \det(B - \lambda_1 I) \times \dots \times \det(B - \lambda_n I)) \\ &\Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_k \text{ n'est pas valeur propre de } B \\ &\Leftrightarrow \text{Sp}A \cap \text{Sp}B = \emptyset. \end{aligned}$$

### Exercice n° 29

Si  $P$  et  $\chi_f$  sont premiers entre eux, d'après le théorème de BÉZOUT, il existe deux polynômes  $U$  et  $V$  tels que  $UP + V\chi_f = 1$ . En prenant la valeur en  $f$  et puisque que  $\chi_f(f) = 0$ , on obtient  $P(f) \circ U(f) = U(f) \circ P(f) = \text{Id}$ .  $P(f)$  est donc un automorphisme de  $E$ .

Réciproquement, si  $P$  et  $\chi_f$  ne sont pas premiers entre eux,  $P$  et  $\chi_f$  ont une racine commune  $\lambda$  dans  $\mathbb{C}$ . Soit  $A$  la matrice de  $f$  dans une base donnée (si  $\mathbb{K}$  n'est pas  $\mathbb{C}$  l'utilisation de la matrice est indispensable). On a  $P(A) = (A - \lambda I)Q(A)$  pour un certain polynôme  $Q$ . La matrice  $A - \lambda I$  n'est pas inversible car  $\lambda$  est valeur propre de  $A$  et donc  $P(A)$  n'est pas inversible ( $\det(P(A)) = \det(A - \lambda I)\det Q(A) = 0$ ) puis  $P(f)$  n'est pas un automorphisme.

### Exercice n° 30

$\text{rg}(M_{a,b} - I) = 1$ , si  $a = b = 0$ , 2 si l'un des deux nombres  $a$  ou  $b$  est nul et l'autre pas et 3 si  $a$  et  $b$  ne sont pas nuls. Donc  $M_{0,0}$  n'est semblable à aucune des trois autres matrices et de même pour  $M_{1,1}$ .

Il reste à savoir si les matrices  $M_{1,0}$  et  $M_{0,1}$  sont semblables.

$(M_{1,0} - I)^2 = (E_{1,2} + E_{2,3})^2 = E_{1,3} \neq 0$  et  $(M_{0,1} - I)^2 = (E_{1,2} + E_{3,4})^2 = 0$ . Donc les matrices  $M_{1,0}$  et  $M_{0,1}$  ne sont pas semblables.

### Exercice n° 31

Soit  $B$  la matrice de l'énoncé.  $\text{rg}B = 1$  et si  $A$  existe, nécessairement  $\text{rg}A = n - 1$  (planche 3, exercice n° 18).

Une matrice de rang 1 admet l'écriture générale  $U^tV$  où  $U$  et  $V$  sont des vecteurs colonnes non nuls. Ici  $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$  et

$$V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Si  $A$  existe,  $A$  doit déjà vérifier  $A^tB = {}^tBA = 0$  ou encore  $AV^tU = 0$  (1) et  $V^tUA = 0$  (2). En multipliant les deux membres de l'égalité (1) par  $U$  à droite puis en simplifiant par le réel non nul  ${}^tUU = \|U\|_2^2$ , on obtient  $AV = 0$ . Ceci montre que la première colonne de  $A$  est nulle (les  $n - 1$  dernières devant alors former une famille libre).

De même, en multipliant les deux membres de l'égalité (2) par  ${}^tV$  à gauche, on obtient  ${}^tUA = 0$  et donc les colonnes de la matrice  $A$  sont orthogonales à  $U$  (pour le produit scalaire usuel) ce qui invite franchement à considérer la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & \dots & \dots & -n \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ qui convient.}$$

### Exercice n° 32

(Si les  $\alpha_k$  sont réels, la matrice  $A$  est symétrique réelle et les redoublants savent que la matrice  $A$  est diagonalisable.)

Si tous les  $\alpha_k$ ,  $1 \leq k \leq n - 1$ , sont nuls la matrice  $A$  est diagonalisable car diagonale.

On suppose dorénavant que l'un au moins des  $\alpha_k$ ,  $1 \leq k \leq n - 1$ , est non nul. Dans ce cas,  $\text{rg}A = 2$ .

0 est valeur propre d'ordre  $n - 2$  au moins. Soient  $\lambda$  et  $\mu$  les deux dernières valeurs propres. On a

$$\lambda + \mu = \text{Tr}A = a_n \text{ et } \lambda^2 + \mu^2 = \text{Tr}(A^2) = \sum_{k=1}^{n-1} a_k^2 + \sum_{k=1}^n a_k^2 = 2 \sum_{k=1}^{n-1} a_k^2 + a_n^2.$$

$$\lambda \text{ et } \mu \text{ sont solutions du système } \begin{cases} \lambda + \mu = a_n \\ \lambda^2 + \mu^2 = 2 \sum_{k=1}^{n-1} a_k^2 + a_n^2 \end{cases} \text{ qui équivaut au système } \begin{cases} \lambda + \mu = a_n \\ \lambda\mu = - \sum_{k=1}^{n-1} a_k^2 \end{cases} \quad (S).$$

On a alors les situations suivantes :

- Si  $\lambda$  et  $\mu$  sont distincts et non nuls,  $A$  est diagonalisable car l'ordre de multiplicité de chaque valeur propre est égale à la dimension du sous-espace propre correspondant.
- Si  $\lambda$  ou  $\mu$  est nul,  $A$  n'est pas diagonalisable car l'ordre de multiplicité de la valeur propre 0 est différent de  $n - 2$ , la dimension du noyau de  $A$ .
- Si  $\lambda = \mu \neq 0$ ,  $A$  est diagonalisable si et seulement si  $\text{rg}(A - \lambda I) = n - 2$  mais on peut noter que si  $\lambda$  n'est pas nul, on a toujours  $\text{rg}(A - \lambda I) = n - 1$  en considérant la matrice extraite formée des  $n-1$  premières lignes et colonnes.

En résumé, la matrice  $A$  est diagonalisable si et seulement si le système (S) admet deux solutions distinctes et non nulles.

Mais  $\lambda$  et  $\mu$  sont solutions du système (S) si et seulement si  $\lambda$  et  $\mu$  sont les racines de l'équation (E) :  $X^2 - a_n X - \sum_{k=1}^{n-1} a_k^2 = 0$ .

Par suite,  $A$  est diagonalisable si et seulement si  $\sum_{k=1}^{n-1} a_k^2 \neq 0$  et  $\Delta = a_n^2 + 4 \sum_{k=1}^{n-1} a_k^2 \neq 0$ .

### Exercice n° 33

$$1) \chi_A = \begin{vmatrix} X-1 & -1 & 1 \\ -1 & X-1 & -1 \\ -1 & -1 & X-1 \end{vmatrix} = (X-1)(X^2 - 2X) + (2-X) - (2-X) = X(X-1)(X-2).$$

On est dans le cas d'une matrice diagonalisable avec 3 valeurs propres simples.

**Recherche des droites stables.** Dans chacun des cas, les droites stables sont les droites engendrées par des vecteurs propres. On obtient immédiatement les 3 droites stables :  $E_0 = \text{Vect}(e_1)$  où  $e_1 = (1, -1, 0)$ ,  $E_1 = \text{Vect}(e_2)$  où  $e_2 = (1, -1, -1)$  et  $E_2 = \text{Vect}(e_3)$  où  $e_3 = (0, 1, 1)$ .

**Recherche des plans stables.** Soit  $P$  un plan stable par  $f$ . La restriction de  $f$  à  $P$  est un endomorphisme de  $P$  et on sait de plus que le polynôme caractéristique de  $f|_P$  divise celui de  $f$ .  $f|_P$  est diagonalisable car  $f$  l'est car on dispose d'un polynôme scindé à racines simples annihilant  $f$  et donc  $f|_P$ . On en déduit que  $P$  est engendré par deux vecteurs propres indépendants de  $f|_P$  qui sont encore vecteurs propres de  $f$ . On obtient trois plans stables :  $P_1 = \text{Vect}(e_2, e_3)$ ,  $P_2 = \text{Vect}(e_1, e_3)$  et  $P_3 = \text{Vect}(e_1, e_2)$ .

$$2) \chi_A = \begin{vmatrix} X-2 & -2 & -1 \\ -1 & X-3 & -1 \\ -1 & -2 & X-2 \end{vmatrix} = (X-2)(X^2 - 5X + 4) + (-2X + 2) - (X-1) = (X-1)((X-2)(X-4) - 2 - 1) = (X-1)(X^2 - 6X + 5) = (X-1)^2(X-5).$$

Puis  $E_1$  est le plan d'équation  $x + 2y + z = 0$  et  $E_5 = \text{Vect}((1, 1, 1))$ .

On est toujours dans le cas diagonalisable mais avec une valeur propre double.

Les droites stables sont  $E_5 = \text{Vect}((1, 1, 1))$  et n'importe quelle droite contenue dans  $E_1$ . Une telle droite est engendrée par un vecteur de la forme  $(x, y, -x - 2y)$  avec  $(x, y) \neq (0, 0)$ .

**Recherche des plans stables.** Soit  $P$  un plan stable par  $f$ .  $f$  est diagonalisable et donc  $f|_P$  est un endomorphisme diagonalisable de  $P$ . Par suite,  $P$  est engendré par deux vecteurs propres indépendants de  $f$ . On retrouve le plan propre de  $f$  d'équation  $x + 2y + z = 0$  et les plans engendrés par  $(1, 1, 1)$  et un vecteur quelconque non nul du plan d'équation  $x + 2y + z = 0$ . L'équation générale d'un tel plan est  $(-a - 3b)x + (2a + 2b)y + (b - a)z = 0$  où  $(a, b) \neq (0, 0)$ .

3)

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X-6 & 6 & -5 \\ 4 & X+1 & -10 \\ -7 & 6 & X-4 \end{vmatrix} = (X-6)(X^2 - 3X + 56) - 4(6X + 6) - 7(5X - 55) = X^3 - 9X^2 + 15X + 25 \\ = (X+1)(X^2 - 10X + 25) = (X+1)(X-5)^2.$$

$E_{-1} = \text{Vect}(10, 15, 4)$  et  $E_5 = \text{Vect}((1, 1, 1))$ . On est dans le cas où  $A$  admet une valeur propre simple et une double mais n'est pas diagonalisable. Les droites stables par  $f$  sont les deux droites propres.

**Recherche des plans stables.** Soit  $P$  un plan stable par  $f$ . Le polynôme caractéristique de  $f|_P$  est unitaire et divise celui de  $f$ . Ce polynôme caractéristique est donc soit  $(X+1)(X-5)$  soit  $(X-5)^2$ .



Dans le premier cas,  $f|_P$  est diagonalisable et  $P$  est nécessairement le plan  $\text{Vect}((10, 15, 4)) + \text{Vect}((1, 1, 1))$  c'est-à-dire le plan d'équation  $11x - 6y - 5z = 0$ .

Dans le deuxième cas,  $\chi_{f|_P} = (X - 5)^2$  et 5 est l'unique valeur propre de  $f|_P$ . Le théorème de CAYLEY-HAMILTON montre que  $(f|_P - 5\text{Id})^2 = 0$  et donc  $P$  est contenu dans  $\text{Ker}(f - 5\text{Id})^2$ .  $\text{Ker}(f - 5\text{Id})^2$  est le plan d'équation  $x = z$  qui est bien sûr stable par  $f$  car  $(f - 5\text{Id})^2$  commute avec  $f$ .

### Exercice n° 34

Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 2 & 6 & -14 \\ 1 & 3 & -7 \end{pmatrix}$ .  $A$  est de rang 1 et donc admet deux valeurs propres égales à 0.  $\text{Tr}A = 0$  et donc la troisième

valeur propre est encore 0. Donc  $\chi_A = X^3$ .  $A$  est nilpotente et le calcul donne  $A^2 = 0$ . Ainsi, si  $X$  est une matrice telle que  $X^2 = A$  alors  $X$  est nilpotente et donc  $X^3 = 0$ .

**Réduction de  $A$ .**  $A^2 = 0$ . Donc  $\text{Im}A \subset \text{Ker}A$ . Soit  $e_3$  un vecteur non dans  $\text{Ker}A$  puis  $e_2 = Ae_3$ .  $(e_2)$  est une base de  $\text{Im}A$  que l'on complète en  $(e_1, e_2)$  base de  $\text{Ker}A$ .

$(e_1, e_2, e_3)$  est une base de  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$  car si  $ae_1 + be_2 + ce_3 = 0$  alors  $A(ae_1 + be_2 + ce_3) = 0$  c'est-à-dire  $ce_2 = 0$  et donc  $c = 0$ . Puis  $a = b = 0$  car la famille  $(e_1, e_2)$  est libre.

Si  $P$  est la matrice de passage de la base canonique de  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$  à la base  $(e_1, e_2, e_3)$  alors  $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . On

voit peut prendre  $P = \begin{pmatrix} 3 & -7 & 0 \\ -1 & -14 & 0 \\ 0 & -7 & 1 \end{pmatrix}$ .

Si  $X^2 = A$ ,  $X$  commute avec  $A$  et donc  $X$  laisse stable  $\text{Im}A$  et  $\text{Ker}A$ . On en déduit que  $Xe_2$  est colinéaire à  $e_2$  et  $Xe_1$  est dans  $\text{Vect}(e_1, e_2)$ . Donc  $P^{-1}XP$  est de la forme  $\begin{pmatrix} a & 0 & d \\ b & c & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$ . De plus,  $X$  est nilpotente de polynôme caractéristique

$(\lambda - a)(\lambda - c)(\lambda - f)$ . On a donc nécessairement  $a = c = f = 0$ .  $P^{-1}XP$  est de la forme  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ a & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

Enfin,  $X^2 = A \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ a & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow ab = 1$ .

Les matrices  $X$  solutions sont les matrices de la forme  $P \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{a} \\ a & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$  où  $a$  est non nul et  $b$  quelconque.

On trouve  $P^{-1} = \frac{1}{49} \begin{pmatrix} 14 & -7 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ -7 & -21 & 49 \end{pmatrix}$  puis

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{49} \begin{pmatrix} 3 & -7 & 0 \\ -1 & -14 & 0 \\ 0 & -7 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{a} \\ a & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14 & -7 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ -7 & -21 & 49 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{49} \begin{pmatrix} -7a & 0 & \frac{3}{a} - 7b \\ -14a & 0 & -\frac{1}{a} - 14b \\ -7a & 0 & -7b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14 & -7 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ -7 & -21 & 49 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2a - \frac{3}{7a} + b & a - \frac{9}{7a} + 3b & \frac{3}{a} - 7b \\ -4a + \frac{1}{7a} + 2b & 2a + \frac{3}{7a} + 6b & -\frac{1}{a} - 14b \\ -2a + b & a + 3b & -7b \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}. \end{aligned}$$

**Exercice n° 35**

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X-1 & 0 & 1 \\ -1 & X-2 & -1 \\ -2 & -2 & X-3 \end{vmatrix} = (X-1)(X^2 - 5X + 4) + (2X-2) = (X-1)(X^2 - 5X + 4 + 2) = (X-1)(X-2)(X-3).$$

$A$  est à valeurs propres réelles et simples.  $A$  est diagonalisable dans  $\mathbb{R}$  et les sous-espaces propres sont des droites.

Si  $M$  est une matrice qui commute avec  $A$ ,  $M$  laisse stable ces droites et donc si  $P$  est une matrice inversible telle que  $P^{-1}AP$  soit diagonale alors la matrice  $P^{-1}MP$  est diagonale. Réciproquement une telle matrice commute avec  $A$ .

$$C(A) = \{P \text{diag}(a, b, c)P^{-1}, (a, b, c) \in \mathbb{C}^3\}.$$

$$\text{On trouve } C(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 2b-c & -a+2b-c & \frac{a-c}{2} \\ -b+c & a-b+c & (-a+c)/2 \\ 2c-2b & -2b+c & c \end{pmatrix}, (a, b, c) \in \mathbb{C}^3 \right\}. \text{ On peut vérifier que } C(A) = \text{Vect}(I, A, A^2).$$

**Exercice n° 36**

$F$  est stable par  $f$  et donc  $f|_F$  est un endomorphisme de  $F$ .  $f$  est diagonalisable et donc il existe un polynôme  $P$ , scindé à racines simples, tel que  $P(f) = 0$ . Mais alors  $P(f|_F) = 0$  et on a trouvé un polynôme scindé sur  $\mathbb{K}$  à racines simples annulateur de  $f|_F$ . Donc  $f|_F$  est diagonalisable.

**Exercice n° 37**

Soit  $P = X^3 + X^2 + X = X(X-j)(X-j^2)$ .  $P$  est à racines simples dans  $\mathbb{C}$  et annulateur de  $A$ . Donc  $A$  est diagonalisable dans  $\mathbb{C}$  et ses valeurs propres sont à choisir dans  $\{0, j, j^2\}$ . Le polynôme caractéristique de  $A$  est de la forme  $X^\alpha(X-j)^\beta(X-j^2)^\gamma$  avec  $\alpha + \beta + \gamma = n$ . De plus,  $A$  est réelle et on sait que  $j$  et  $j^2 = \bar{j}$  ont même ordre de multiplicité ou encore  $\gamma = \beta$ .

Puisque  $A$  est diagonalisable, l'ordre de multiplicité de chaque valeur propre est égale à la dimension du sous-espace propre correspondant et donc

$$\text{rg}(A) = n - \dim(\text{Ker}A) = n - \alpha = 2\beta.$$

On a montré que  $\text{rg}A$  est un entier pair.