

Planche n° 4. Réduction. Corrigé

Exercice n° 1

1ère solution. $A = 2J - I_3$ où $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. On a $J^2 = 3J$ et plus généralement $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $J^k = 3^{k-1}J$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque les matrices $2J$ et $-I$ commutent, la formule du binôme de NEWTON permet d'écrire

$$\begin{aligned} A^n &= (2J - I_3)^n = (-I_3)^n + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (2J)^k (-I_3)^{n-k} = (-1)^n I_3 + \left(\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 2^k 3^{k-1} (-1)^{n-k} \right) J \\ &= (-1)^n I_3 + \frac{1}{3} \left(\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 6^k (-1)^{n-k} \right) J = (-1)^n I_3 + \frac{1}{3} ((6-1)^n - (-1)^n) J \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5^n + 2(-1)^n & 5^n - (-1)^n & 5^n - (-1)^n \\ 5^n - (-1)^n & 5^n + 2(-1)^n & 5^n - (-1)^n \\ 5^n - (-1)^n & 5^n - (-1)^n & 5^n + 2(-1)^n \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

ce qui reste vrai quand $n = 0$.

Soit de nouveau $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} &((-1)^n I_3 + \frac{1}{3}(5^n - (-1)^n)J) \times ((-1)^{-n} I_3 + \frac{1}{3}(5^{-n} - (-1)^{-n})J) \\ &= I_3 + \frac{1}{3}((-5)^n - 1 + (-5)^{-n} - 1)J + \frac{1}{9}(1 - (-5)^n - (-5)^{-n} + 1)J^2 \\ &= I_3 + \frac{1}{3}((-5)^n - 1 + (-5)^{-n} - 1)J + \frac{3}{9}(1 - (-5)^n - (-5)^{-n} + 1)J = I_3, \end{aligned}$$

et donc A^n est inversible et

$$A^{-n} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5^{-n} + 2(-1)^{-n} & 5^{-n} - (-1)^{-n} & 5^{-n} - (-1)^{-n} \\ 5^{-n} - (-1)^{-n} & 5^{-n} + 2(-1)^{-n} & 5^{-n} - (-1)^{-n} \\ 5^{-n} - (-1)^{-n} & 5^{-n} - (-1)^{-n} & 5^{-n} + 2(-1)^{-n} \end{pmatrix}.$$

Finalement

$$\forall n \in \mathbb{Z}, A^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5^n + 2(-1)^n & 5^n - (-1)^n & 5^n - (-1)^n \\ 5^n - (-1)^n & 5^n + 2(-1)^n & 5^n - (-1)^n \\ 5^n - (-1)^n & 5^n - (-1)^n & 5^n + 2(-1)^n \end{pmatrix}.$$

2ème solution. Puisque $\text{rg}(A+I) = 1$, $\dim(\text{Ker}(A+I)) = 2$ et -1 est valeur propre de A d'ordre au moins 2. La troisième valeur propre λ est fournie par la trace : $\lambda - 1 - 1 = 3$ et donc $\lambda = 5$. Par suite, $\chi_A = (X+1)^2(X-5)$. On note que 0 n'est pas valeur propre de A et donc A est inversible.

De plus, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-1} \Leftrightarrow x + y + z = 0$ et donc $E_{-1} = \text{Vect}(e_1, e_2)$ où $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

De même, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_5 \Leftrightarrow x = y = z$ et $E_5 = \text{Vect}(e_3)$ où $e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \text{diag}(-1, -1, 5)$ et on a $A = PDP^{-1}$.

Calcul de P^{-1} . Soit (i, j, k) la base canonique de \mathbb{R}^3 .

$$\begin{cases} e_1 = i - j \\ e_2 = i - k \\ e_3 = i + j + k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} j = i - e_1 \\ k = i - e_2 \\ e_3 = i + i - e_1 + i - e_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} i = \frac{1}{3}(e_1 + e_2 + e_3) \\ j = \frac{1}{3}(-2e_1 + e_2 + e_3) \\ k = \frac{1}{3}(e_1 - 2e_2 + e_3) \end{cases}$$

et donc $P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Soit alors $n \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} A^n &= PD^nP^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} (-1)^n & (-1)^n & 5^n \\ -(-1)^n & 0 & 5^n \\ 0 & -(-1)^n & 5^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5^n + 2(-1)^n & 5^n - (-1)^n & 5^n - (-1)^n \\ 5^n - (-1)^n & 5^n + 2(-1)^n & 5^n - (-1)^n \\ 5^n - (-1)^n & 5^n - (-1)^n & 5^n + 2(-1)^n \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

et on retrouve le résultat obtenu plus haut, le calcul ayant été mené directement avec n entier relatif.

3ème solution. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La division euclidienne de X^n par χ_A fournit trois réels a_n , b_n et c_n et un polynôme Q tels que $X^n = \chi_A Q + a_n X^2 + b_n X + c_n$. En prenant les valeurs des deux membres en 5, puis la valeur des deux membres ainsi que de leurs dérivées en -1 , on obtient

$$\begin{cases} 25a_n + 5b_n + c_n = 5^n \\ a_n - b_n + c_n = (-1)^n \\ -2a_n + b_n = n(-1)^{n-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_n = 2a_n - n(-1)^n \\ 35a_n + c_n = 5n(-1)^n + 5^n \\ -a_n + c_n = -(n-1)(-1)^n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_n = \frac{1}{36}(5^n + (6n-1)(-1)^n) \\ c_n = \frac{1}{36}(5^n + (-30n+35)(-1)^n) \\ b_n = \frac{1}{36}(2 \times 5^n + (-24n-2)(-1)^n) \end{cases}.$$

Le théorème de CAYLEY-HAMILTON fournit alors

$$\begin{aligned} A^n &= \frac{1}{36} ((5^n + (6n-1)(-1)^n)A^2 + 2(5^n - (12n+1)(-1)^n)A + (5^n + (-30n+35)(-1)^n)I_3) \\ &= \frac{1}{36} \left((5^n + (6n-1)(-1)^n) \begin{pmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{pmatrix} + 2(5^n - (12n+1)(-1)^n) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right. \\ &\quad \left. + (5^n + (-30n+35)(-1)^n) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 12 \times 5^n + 24(-1)^n & 12 \times 5^n - 12(-1)^n & 12 \times 5^n - 12(-1)^n \\ 12 \times 5^n - 12(-1)^n & 12 \times 5^n + 24(-1)^n & 12 \times 5^n - 12(-1)^n \\ 12 \times 5^n - 12(-1)^n & 12 \times 5^n - 12(-1)^n & 12 \times 5^n + 24(-1)^n \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5^n + 2(-1)^n & 5^n - (-1)^n & 5^n - (-1)^n \\ 5^n - (-1)^n & 5^n + 2(-1)^n & 5^n - (-1)^n \\ 5^n - (-1)^n & 5^n - (-1)^n & 5^n + 2(-1)^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On retrouve encore une fois le même résultat mais pour $n \in \mathbb{N}^*$ uniquement.

Exercice n° 2

Soit $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Si $X^2 = A$ alors $AX = X^3 = XA$ et donc X et A commutent.

A admet trois valeurs propres réelles et simples à savoir 1, 3 et 4. Donc A est diagonalisable dans \mathbb{R} et les sous espaces propres de A sont des droites. X commute avec A et donc laisse stable les trois droites propres de A .

Ainsi une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A est également une base de vecteurs propres de X ou encore, si P est une matrice réelle inversible telle que $P^{-1}AP$ soit la matrice diagonale $D_0 = \text{diag}(3, 4, 1)$ alors pour la même matrice P , $P^{-1}XP$ est une matrice diagonale D . De plus

$$X^2 = A \Leftrightarrow PD^2P^{-1} = PD_0P^{-1} \Leftrightarrow D^2 = D_0 \Leftrightarrow D = \text{diag}(\pm\sqrt{3}, \pm 2, \pm 1)$$

ce qui fournit huit solutions deux à opposées. On peut prendre $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -16 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ puis $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 0 \\ -5/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. D'où

les solutions

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -16 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3}\varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & 2\varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 0 \\ -5/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{3}\varepsilon_1 & 0 & 0 \\ -16\sqrt{3}\varepsilon_1 & 2\varepsilon_2 & 0 \\ 5\sqrt{3}\varepsilon_1 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 0 \\ -5/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \sqrt{3}\varepsilon_1 & 0 & 0 \\ -8\sqrt{3}\varepsilon_1 + 16\varepsilon_2 & 2\varepsilon_2 & 0 \\ 5(\sqrt{3}\varepsilon_1 - \varepsilon_3)/2 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}.$$

où $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \in \{-1, 1\}^3$.

Exercice n° 3

$$1) \chi_A = \begin{vmatrix} X-3 & -1 & 0 \\ 4 & X+1 & 0 \\ -4 & -8 & X+2 \end{vmatrix} = (X+2)((X-3)(X+1)+4) = (X+2)(X^2-2X+1) = (X+2)(X-1)^2.$$

A diagonalisable $\Rightarrow \dim(\text{Ker}(A-I)) = 2 \Rightarrow \text{rg}(A-I) = 1$ ce qui n'est pas. Donc A n'est pas diagonalisable. De plus,

$$E_{-2} = \text{Vect}(e_1) \text{ où } e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } E_1 = \text{Vect}(e_2) \text{ où } e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

$$2) (A-I)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ 4 & 8 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ 4 & 8 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -36 & -36 & 9 \end{pmatrix} \text{ et donc } \text{Ker}(A-I)^2 \text{ est le plan d'équation } \\ 4x + 4y - z = 0.$$

3) On note f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique de \mathbb{R}^3 est A. Le théorème de CAYLEY-HAMILTON et le théorème de décomposition des noyaux permettent d'affirmer

$$\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) = \text{Ker}(A+2I) \oplus \text{Ker}(A-I)^2.$$

De plus, chacun des sous-espaces $\text{Ker}(A+2I)$ et $\text{Ker}(A-I)^2$ étant stables par f, la matrice de f dans toute base adaptée à cette décomposition est diagonale par blocs. Enfin, $\text{Ker}(A-I)$ est une droite vectorielle contenue dans le plan $\text{Ker}(A-I)^2$ et en choisissant une base de $\text{Ker}(A-I)^2$ dont l'un des deux vecteurs est dans $\text{Ker}(A-I)$, la matrice de f aura la forme voulue.

On a déjà choisi $e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$ puis on prend $e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. On note $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$. P est inversible d'inverse $P^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On peut déjà affirmer que $P^{-1}AP$ est de la forme $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \times \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Plus précisément

$$Ae_3 - e_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & 8 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} = e_2$$

et donc $Ae_3 = e_2 + e_3$ puis

$$A = PTP^{-1} \text{ où } P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4) Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $T = D + N$ où $D = \text{diag}(-2, 1, 1)$ et $N = E_{2,3}$. On a $ND = DN$ et $N^2 = 0$. Puisque les matrices D et N commutent, la formule du binôme de NEWTON permet d'écrire

$$T^n = D^n + nD^{n-1}N = \text{diag}((-2)^n, 1, 1) + n\text{diag}((-2)^{n-1}, 1, 1)E_{2,3} = \text{diag}((-2)^n, 1, 1) + nE_{2,3} \\ = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Puis

$$\begin{aligned}
A^n &= P T^n P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & -4 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 & n+1 \\ 0 & -2 & -2n-1 \\ (-2)^n & -4 & -4n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & -4 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2n+1 & n & 0 \\ -4n & -2n+1 & 0 \\ -4(-2)^n - 8n+4 & -4(-2)^n - 4n+4 & (-2)^n \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \begin{pmatrix} 2n+1 & n & 0 \\ -4n & -2n+1 & 0 \\ -4(-2)^n - 8n+4 & -4(-2)^n - 4n+4 & (-2)^n \end{pmatrix}.$$

Exercice n° 4

Soit P un élément de $\mathbb{R}_{2n}[X]$. $f(P)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $2n+1$ et de plus, si a est le coefficient de X^{2n} dans P , le coefficient de X^{2n+1} dans $f(P)$ est $2na - 2na = 0$. Donc $f(P)$ est un élément de $\mathbb{R}_{2n}[X]$. La linéarité de f étant claire, f est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_{2n}[X]$.

Cherchons maintenant P polynôme non nul et λ réel tels que $f(P) = \lambda P$ ce qui équivaut à

$$\frac{P'}{P} = \frac{2nX + \lambda}{X^2 - 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{2n + \lambda}{X - 1} + \frac{2n - \lambda}{X + 1} \right).$$

En identifiant à la décomposition en éléments simples classique de $\frac{P'}{P}$ (à savoir si $P = K(X - z_1)^{\alpha_1} \dots (X - z_k)^{\alpha_k}$ avec

$K \neq 0$ et les z_i deux à deux distincts, alors $\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^k \frac{\alpha_i}{X - z_i}$), on voit que nécessairement P ne peut admettre pour racines

dans \mathbb{C} que -1 et 1 et d'autre part que P est de degré $\frac{1}{2}(2n + \lambda + 2n - \lambda) = 2n$. P est donc nécessairement de la forme

$$P = aP_k \text{ avec } a \in \mathbb{R}^* \text{ et } P_k = (X - 1)^k (X + 1)^{2n-k} \text{ avec } k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket.$$

Réciproquement, chaque P_k est non nul et vérifie

$$\frac{P'_k}{P_k} = \frac{k}{X - 1} + \frac{2n - k}{X + 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{2n + (2k - 2n)}{X - 1} + \frac{2n - (2k - 2n)}{X + 1} \right).$$

Donc, pour chaque $k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket$, P_k est vecteur propre de f associé à la valeur propre $\lambda_k = 2(k - n)$.

Ainsi, f admet $2n + 1$ valeurs propres, nécessairement simples car $\dim(\mathbb{R}_{2n}[X]) = 2n + 1$. f est donc diagonalisable et les sous espaces propres de f sont les droites $\text{Vect}(P_k)$, $0 \leq k \leq 2n$.

Exercice n° 5

Soit $P = aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbb{R}_3[X]$

$$AP - (X^4 - X)P = (X - 1)P = aX^4 + (b - a)X^3 + (c - b)X^2 + (d - c)X - d = a(X^4 - X) + (b - a)X^3 + (c - b)X^2 + (a + d - c)X - d.$$

et donc $AP = (X^4 - X)(P + a) + (b - a)X^3 + (c - b)X^2 + (a + d - c)X - d$ et donc $f(P) = (b - a)X^3 + (c - b)X^2 + (a + d - c)X - d$.

Par suite, f est un endomorphisme de E et la matrice de f dans la base canonique $(1, X, X^2, X^3)$ de E est

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

puis

$$\begin{aligned}
X A &= \begin{vmatrix} X+1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & X+1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & X+1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & X+1 \end{vmatrix} = (X+1) \begin{vmatrix} X+1 & 0 & -1 \\ -1 & X+1 & 0 \\ 0 & -1 & X+1 \end{vmatrix} \\
&= (X+1)((X+1)^3 - 1) = X(X+1)(X^2 + 3X + 3).
\end{aligned}$$

A admet quatre valeurs propres simples dans \mathbb{C} , deux réelles 0 et -1 et deux non réelles $-1 + j$ et $-1 + j^2$. χ_f n'est pas scindé sur \mathbb{R} et donc f n'est pas diagonalisable.

- Soit $P \in E$. $P \in \text{Ker}f \Leftrightarrow b - a = c - b = a + d - c = -d = 0 \Leftrightarrow a = b = c$ et $d = 0$. $\text{Ker}f = \text{Vect}(X^3 + X^2 + X)$.
- Soit $P \in E$. $P \in \text{Ker}(f + \text{Id}) \Leftrightarrow b = c = a + d = 0 \Leftrightarrow b = c = 0$ et $d = -a$. $\text{Ker}(f + \text{Id}) = \text{Vect}(X^3 - 1)$.
- $\text{rg}(f) = 3$ et immédiatement $\text{Im}f = \text{Vect}(X - 1, X^2 - X, X^3 - X^2)$.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on peut continuer :

$$P \in \text{Ker}(f + (1 - j)\text{Id}) \Leftrightarrow b - ja = c - jb = a + d - jc = -jd = 0 \Leftrightarrow b = ja, c = j^2a \text{ et } d = 0.$$

$$\text{Donc } \text{Ker}(f + (1 - j)\text{Id}) = \text{Vect}(X^3 + jX^2 + j^2X) \text{ et en conjuguant } \text{Ker}(f + (1 - j^2)\text{Id}) = \text{Vect}(X^3 + j^2X^2 + jX).$$

Remarque. $B = X(X-1)(X-j)(X-j^2)$ et on a trouvé pour base de vecteurs propres les quatre polynômes de LAGRANGE $X^3 - 1 = (X-1)(X-j)(X-j^2)$ puis $X^3 + X^2 + X = X(X-j)(X-j^2)$ puis $X^3 + jX^2 + j^2X = X(X-1)(X-j^2)$ et enfin $X^3 + j^2X^2 + jX = X(X-1)(X-j)$. C'est une généralité. On peut montrer que si $E = \mathbb{C}_n[X]$ et si B a $n+1$ racines deux à deux distinctes dans \mathbb{C} alors f est diagonalisable et une base de vecteurs propres est fournie par les polynômes de LAGRANGE associés aux racines de B et ceci pour un polynôme A quelconque.

Exercice n° 6

Si $p = q$, le résultat est connu : $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

Supposons par exemple $p < q$. On se ramène au cas de matrices carrées en complétant. Soient $A' = \begin{pmatrix} A & \\ & 0_{q-p,q} \end{pmatrix}$ et $B' = \begin{pmatrix} B & \\ & 0_{q,q-p} \end{pmatrix}$. A' et B' sont des matrices carrées de format q et $A'B'$ et $B'A'$ ont même polynôme caractéristique.

$$\text{Un calcul par blocs donne } B'A' = BA \text{ et } A'B' = \begin{pmatrix} AB & \\ & 0_{q-p,p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & \\ & 0_{q,q-p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AB & 0_{p,q-p} \\ 0_{q-p,p} & 0_{q-p,q-p} \end{pmatrix}.$$

Donc $\chi_{BA} = X^{q-p}\chi_{AB}$ ou encore, avec une écriture plus symétrique, $X^p\chi_{BA} = X^q\chi_{AB}$ ce qui est vrai dans tous les cas.

$$\forall A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), \forall B \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K}), X^p\chi_{BA} = X^q\chi_{AB}.$$

Exercice n° 7

Si u est inversible,

$$\det(u + v) = \det u \Leftrightarrow \det u \times \det(\text{Id} + u^{-1}v) = \det u \Leftrightarrow \det(\text{Id} + u^{-1}v) = 1.$$

u et v commutent et donc u^{-1} et v également car $uv = vu \Rightarrow u^{-1}uvu^{-1} = u^{-1}vu u^{-1} \Rightarrow vu^{-1} = u^{-1}v$. Mais alors, puisque v est nilpotent, l'endomorphisme $w = u^{-1}v$ l'est également car $(u^{-1}v)^p = u^{-p}v^p$.

Il reste donc à calculer $\det(\text{Id} + w)$ où w est un endomorphisme nilpotent. On remarque que $\det(\text{Id} + w) = (-1)^n \chi_w(-1)$. Il est connu que 0 est l'unique valeur propre d'un endomorphisme nilpotent et donc $\chi_w = X^n$ puis

$$\det(\text{Id} + w) = (-1)^n \chi_w(-1) = (-1)^n (-1)^n = 1.$$

Le résultat est donc démontré dans le cas où u est inversible. Si u n'est pas inversible, $u + x\text{Id}$ est inversible sauf pour un nombre fini de valeurs de x et commute toujours avec v . Donc, pour tout x sauf peut-être pour un nombre fini, $\det(u + x\text{Id} + v) = \det(u + x\text{Id})$. Ces deux polynômes coïncident en une infinité de valeurs de x et sont donc égaux. Ils prennent en particulier la même valeur en 0 ce qui refournit $\det(u + v) = \det u$.

Exercice n° 8

- Si A est nilpotente, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, A^k est nilpotente et donc 0 est l'unique valeur propre dans \mathbb{C} de A^k . Par suite, $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\text{Tr}(A^k) = 0$.
- Réciproquement, supposons que $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\text{Tr}(A^k) = 0$ et montrons alors que toutes les valeurs propres de A dans \mathbb{C} sont nulles. Ceci montrera que le polynôme caractéristique de A est X^n et donc que A est nilpotente d'après le théorème de CAYLEY-HAMILTON.

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les n valeurs propres (distinctes ou confondues) de A dans \mathbb{C} . Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on pose $S_k = \lambda_1^k + \dots + \lambda_n^k$. Il s'agit de montrer que : $(\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, S_k = 0) \Rightarrow (\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_j = 0)$.

Les S_k , $1 \leq k \leq n$, sont tous nuls et par combinaisons linéaires de ces égalités, on en déduit que pour tout polynôme P de degré inférieur ou égal à n et s'annulant en 0, on a $P(\lambda_k) = 0$ (1). Il s'agit alors de bien choisir le polynôme P .

Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Soient μ_1, \dots, μ_p les valeurs propres deux à deux distinctes de A ($1 \leq p \leq n$). On prend $P = X \prod_{j \neq i} (X - \mu_j)$

si $p \geq 2$ et $P = X$ si $p = 1$. P est bien un polynôme de degré inférieur ou égal à n et s'annule en 0. L'égalité $P(\mu_i) = 0$ fournit $\mu_i = 0$ ce qu'il fallait démontrer.

Exercice n° 9

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
f^k g - g f^k &= f^k g - f^{k-1} g f + f^{k-1} g f - f^{k-2} g f^2 + f^{k-2} g f^2 - \dots - f g f^{k-1} + f g f^{k-1} - g f^k \\
&= \sum_{i=0}^{k-1} (f^{k-i} g f^i - f^{k-i-1} g f^{i+1}) = \sum_{i=0}^{k-1} f^{k-i-1} (f g - g f) f^i = \sum_{i=0}^{k-1} f^{k-i-1} f f^i \\
&= k f^k.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\text{si } fg - gf = f, \text{ alors } \forall k \in \mathbb{N}, f^k g - g f^k = k f^k \quad (*).$$

1ère solution. Soit $\varphi : \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{L}(E)$. φ est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\varphi(f^k) = k f^k$. Si, pour $h \mapsto hg - gh$

$k \in \mathbb{N}^*$ donné, f^k n'est pas nul, f^k est valeur propre de φ associé à la valeur propre k . Par suite, si aucun des f^k n'est nul, φ admet une infinité de valeurs propres deux à deux distinctes. Ceci est impossible car $\dim(\mathcal{L}(E)) < +\infty$. Donc, f est nilpotent.

2ème solution. Les égalités (*) peuvent s'écrire $P(f)g - gP(f) = fP'(f)$, (**), quand P est un polynôme de la forme X^k , $k \in \mathbb{N}$. Par linéarité, les égalités (**) sont vraies pour tout polynôme P .

En particulier, l'égalité (**) est vraie quand P est Q_f le polynôme minimal de f et donc

$$f Q'_f(f) = Q_f(f)g - g Q_f(f) = 0.$$

Le polynôme $X Q'_f$ est donc un polynôme annulateur de f et on en déduit que le polynôme Q_f divise le polynôme $X Q'_f$. Plus précisément, si $p \in \mathbb{N}^*$ est le degré de Q_f , les polynômes $p Q_f$ et $X Q'_f$ ayant mêmes degrés et mêmes coefficients dominants, on en déduit que $p Q_f = X Q'_f$ ou encore que

$$\frac{Q'_f}{Q_f} = \frac{p}{X}.$$

Par identification à la décomposition en éléments simples usuelles de $\frac{Q'_f}{Q_f}$, on en déduit que $Q_f = X^p$. En particulier, $f^p = 0$ et encore une fois f est nilpotent.

Exercice n° 10

1er cas. Supposons $\alpha = \beta = 0$ et donc $uv = vu$. Puisque E est un \mathbb{C} -espace de dimension finie non nulle, u admet au moins une valeur propre que l'on note λ . Le sous-espace propre E_λ correspondant n'est pas réduit à $\{0\}$, est stable par u et d'autre part stable par v car u et v commutent. On note u' et v' les restrictions de u et v au sous-espace E_λ . u' et v' sont des endomorphismes de E_λ . De nouveau, E_λ est un \mathbb{C} -espace de dimension finie non nulle et donc v' admet au moins un vecteur propre x_0 . Par construction, x_0 est un vecteur propre commun à u et v .

2ème cas. Supposons par exemple $\alpha \neq 0$.

$$\begin{aligned}
uv - vu &= \alpha u + \mu v \Leftrightarrow (\alpha u + \beta v) \circ \frac{1}{\alpha} v - \frac{1}{\alpha} v \circ (\alpha u + \beta v) = \alpha u + \beta v \\
&\Leftrightarrow fg - gf = f \text{ en posant } f = \alpha u + \beta v \text{ et } g = \frac{1}{\alpha} v.
\end{aligned}$$

On va chercher un vecteur propre commun à u et v dans le noyau de f . Montrons tout d'abord que Kerf n'est pas nul (on sait montrer que f est en fait nilpotent (n° 9) mais on peut montrer directement une propriété un peu moins forte).

Si f est inversible, l'égalité $fg - gf = f$ fournit $(g + \text{Id}) \circ f = f \circ g$ et donc $g + \text{Id} = f \circ g \circ f^{-1}$. Par suite, g et $g + \text{Id}$ ont même polynôme caractéristique ou encore, si λ est valeur propre de g alors $\lambda + 1$ est encore valeur propre de g . Mais alors $\lambda + 2, \lambda + 3, \dots$ sont aussi valeurs propres de g et g a une infinité de valeurs propres deux à deux distinctes. Ceci est exclu et donc Kerf n'est pas réduit à $\{0\}$.

Maintenant, si x est un vecteur de Kerf , on a $f(g(x)) = g(f(x)) + f(x) = 0$ et $g(x)$ est dans Kerf . Donc g laisse Kerf stable et sa restriction à Kerf est un endomorphisme de Kerf qui admet au moins une valeur propre et donc au moins un vecteur propre. Ce vecteur est bien un vecteur propre commun à f et g .

Enfin si x est vecteur propre commun à f et g alors x est vecteur propre de $v = \frac{1}{\alpha} g$ et de $u = \frac{1}{\alpha} (f - \beta v)$. x est un vecteur propre commun à u et v .

Exercice n° 11

1) • E contient I_2 et est inclus dans $GL_2(\mathbb{R})$.

• Si A et B sont dans E alors AB est à coefficients entiers et $\det(AB) = \det A \times \det B = 1$. Donc AB est dans E.

• Si A est dans E, $\det(A^{-1}) = 1$ et en particulier $A^{-1} = \frac{1}{\det A} {}^t \text{com}(A)$ est à coefficients entiers. On en déduit que A^{-1} est dans E.

Finalement

E est un sous-groupe de $GL_2(\mathbb{R})$.

2) Soit A un élément de E tel qu'il existe un entier naturel non nul p tel que $A^p = I_2$.

A est diagonalisable dans \mathbb{C} car annule le polynôme à racines simples $X^p - 1$.

A admet deux valeurs propres distinctes ou confondues qui sont des racines p-èmes de 1 dans \mathbb{C} et puisque A est réelle, on obtient les cas suivants :

1er cas. Si $\text{Sp}A = (1, 1)$, puisque A est diagonalisable, A est semblable à I_2 et par suite $A = I_2$. Dans ce cas, $A^{12} = I_2$.

2ème cas. Si $\text{Sp}A = (-1, -1)$, $A = -I_2$ et $A^{12} = I_2$.

3ème cas. Si $\text{Sp}A = (1, -1)$ alors A est semblable à $\text{diag}(1, -1)$ et donc $A^2 = I_2$ puis encore une fois $A^{12} = I_2$.

4ème cas. Si $\text{Sp}A = (e^{i\theta}, e^{-i\theta})$. Dans ce cas $\text{Tr}A = 2 \cos \theta$ est un entier ce qui impose $2 \cos \theta \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Les cas $\cos \theta = 1$ et $\cos \theta = -1$ ont déjà été étudié.

• Si $\cos \theta = 0$, $\text{Sp}A = (i, -i)$ et A est semblable à $\text{diag}(i, -i)$. Donc $A^4 = I_2$ puis $A^{12} = I_2$.

• Si $\cos \theta = \pm \frac{1}{2}$, $\text{Sp}A = (j, j^2)$ ou $\text{Sp}A = (-j, -j^2)$. Dans le premier cas, $A^3 = I_2$ et dans le deuxième $A^6 = I_2$.

Dans tous les cas $A^{12} = I_2$.

Exercice n° 12

On montre le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ le format de A.

• C'est clair pour $n = 1$.

• Soit $n \geq 1$. Supposons que toute matrice de format n et de trace nulle soit semblable à une matrice de diagonale nulle. Soient A une matrice carrée de format $n + 1$ et de trace nulle puis f l'endomorphisme de \mathbb{K}^{n+1} de matrice A dans la base canonique (e_1, \dots, e_{n+1}) de \mathbb{K}^{n+1} .

Si f est une homothétie de rapport noté k, alors $0 = \text{Tr}(f) = k(n + 1)$ et donc $k = 0$ puis $f = 0$ puis $A = 0$. Dans ce cas, A est effectivement semblable à une matrice de diagonale nulle.

Sinon f n'est pas une homothétie et on sait qu'il existe un vecteur u de E tel que la famille $(u, f(u))$ soit libre (voir exercice n° 25, planche 1). On complète la famille libre $(u, f(u))$ en une base de E. Le coefficient ligne 1, colonne 1, de la matrice

de f dans cette base est nul. Plus précisément, A est semblable à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & \times & \dots & & \dots & \times \\ 1 & & & & & \\ 0 & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ \vdots & & & & A' & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & & & \end{pmatrix}.$$

Puis $\text{Tr}A' = \text{Tr}A = 0$ et par hypothèse de récurrence, A' est semblable à une matrice A_1 de diagonale nulle ou encore il existe A_1 matrice carrée de format n et de diagonale nulle et $Q \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $Q^{-1}A'Q = A_1$.

Mais alors, si on pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & Q & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$, P est inversible car $\det(P) = 1 \times \det(Q) \neq 0$ et un calcul par blocs montre

que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & Q^{-1} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ puis que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & \times & \dots & & \dots & \times \\ \times & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ \vdots & & & & A_1 & \\ \vdots & & & & & \\ \times & & & & & \end{pmatrix}$ est de diagonale nulle.

Exercice n° 13

$\det M = \det \begin{pmatrix} A & 4A \\ A & A \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -3A & 4A \\ 0 & A \end{pmatrix}$ ($\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, L_k \leftarrow L_k - L_{n+k}$) et donc $\det M = \det(A)\det(-3A) = (-3)^n(\det A)^2$.

$$\det M = (-3)^n(\det A)^2.$$

L'idée de l'étude de M qui suit vient de l'étude de la matrice de format 2, $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Une diagonalisation rapide amène à $B = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \times \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Soit alors P la matrice de format $2n$ définie par blocs par $P = \begin{pmatrix} -2I_n & 2I_n \\ I_n & I_n \end{pmatrix}$. Un calcul par blocs montre que P est inversible et que $P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -I_n & 2I_n \\ I_n & 2I_n \end{pmatrix}$ puis que

$$P^{-1}MP = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -I_n & 2I_n \\ I_n & 2I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 4A \\ A & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2I_n & 2I_n \\ I_n & I_n \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} A & -2A \\ 3A & 6A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2I_n & 2I_n \\ I_n & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A & 0 \\ 0 & 3A \end{pmatrix}.$$

On pose $N = \begin{pmatrix} -A & 0 \\ 0 & 3A \end{pmatrix}$. Puisque les matrices M et N sont semblables, M et N ont même polynôme caractéristique et de plus M est diagonalisable si et seulement si N l'est.

Un calcul par blocs fournit $\chi_M = \chi_{-A} \times \chi_{3A}$. Donc, si $\text{Sp}(A) = (\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$, alors $\text{Sp}(M) = (-\lambda_i)_{1 \leq i \leq n} \cup (3\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$.

Cherchons les vecteurs propres Z de N sous la forme $Z = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ où X et Y sont des vecteurs colonnes de format n . Soit $\lambda \in \mathbb{C}$.

$$NZ = \lambda Z \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -A & 0 \\ 0 & 3A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \Leftrightarrow -AX = \lambda X \text{ et } 3AY = \lambda Y.$$

Par suite

$$Z \text{ est vecteur propre de } N \text{ associé à } \lambda \Leftrightarrow (X \neq 0 \text{ ou } Y \neq 0) \text{ et } (X \in \text{Ker}(A + \lambda I) \text{ et } Y \in \text{Ker}\left(A - \frac{\lambda}{3}I\right)).$$

Une discussion suivant λ s'en suit :

1er cas. Si $-\lambda$ et $\frac{\lambda}{3}$ ne sont pas valeurs propres de A alors λ n'est pas valeur propre de M .

2ème cas. Si $-\lambda$ est dans $\text{Sp}A$ et $\frac{\lambda}{3}$ n'y est pas, alors λ est valeur propre de M . Le sous-espace propre associé est l'ensemble des $P \begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2X \\ X \end{pmatrix}$ où X décrit $\text{Ker}(A + \lambda I)$. La dimension de E_λ est alors $\dim(\text{Ker}(A + \lambda I))$.

3ème cas. Si $-\lambda$ n'est pas dans $\text{Sp}A$ et $\frac{\lambda}{3}$ y est, alors λ est valeur propre de M . Le sous-espace propre associé est l'ensemble des $P \begin{pmatrix} 0 \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2Y \\ Y \end{pmatrix}$ où Y décrit $\text{Ker}\left(A - \frac{\lambda}{3}I\right)$. La dimension de E_λ est alors $\dim\left(\text{Ker}\left(A - \frac{\lambda}{3}I\right)\right)$.

4ème cas. Si $-\lambda$ est dans $\text{Sp}A$ et $\frac{\lambda}{3}$ aussi, alors λ est valeur propre de M . Le sous-espace propre associé est l'ensemble des $P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2X + 2Y \\ X + Y \end{pmatrix}$ où X décrit $\text{Ker}(A + \lambda I)$ et Y décrit $\text{Ker}\left(A - \frac{\lambda}{3}I\right)$. La dimension de E_λ est alors $\dim(\text{Ker}(A + \lambda I)) + \dim\left(\text{Ker}\left(A - \frac{\lambda}{3}I\right)\right)$.

Dans tous les cas, $\dim(E_\lambda(M)) = \dim(E_{-\lambda}(A)) + \dim(E_{\lambda/3}(A))$ (et en particulier $\dim(\text{Ker}M) = 2\dim(\text{Ker}A)$). Comme les applications $\lambda \mapsto -\lambda$ et $\lambda \mapsto \frac{\lambda}{3}$ sont des bijections de \mathbb{C} sur lui-même,

$$\begin{aligned}
A \text{ est diagonalisable} &\Leftrightarrow \sum_{\lambda \in \mathbb{C}} \dim(E_\lambda(A)) = n \\
&\Leftrightarrow \sum_{\lambda \in \mathbb{C}} \dim(E_\lambda(A)) + \sum_{\lambda \in \mathbb{C}} \dim(E_\lambda(A)) = 2n \\
&\Leftrightarrow \sum_{\lambda \in \mathbb{C}} \dim(E_{-\lambda}(A)) + \sum_{\lambda \in \mathbb{C}} \dim(E_{\lambda/3}(A)) = 2n \\
&\Leftrightarrow M \text{ est diagonalisable.}
\end{aligned}$$

Exercice n° 14

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X & -b & \dots & -b \\ -a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -b \\ -a & \dots & -a & X \end{vmatrix}. \text{ Soit } f(x) = \begin{vmatrix} X+x & -b+x & \dots & -b+x \\ -a+x & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -b+x \\ -a+x & \dots & -a+x & X+x \end{vmatrix}.$$

f est un polynôme en x . Par n linéarité du déterminant, $f(x)$ est somme de 2^n déterminants dont $2^n - (n+1)$ sont nuls car contiennent deux colonnes de x . Les déterminants restant contiennent au plus une colonne de x et sont donc de degré inférieur ou égal à 1 en x . f est donc une fonction affine. Il existe donc deux nombres α et β tels que $\forall x \in \mathbb{C}, f(x) = \alpha x + \beta$.

Les égalités $f(a) = (X-a)^n$ et $f(b) = (X-b)^n$ fournissent $\begin{cases} \alpha a + \beta = (X-a)^n \\ \alpha b + \beta = (X-b)^n \end{cases}$ et comme $a \neq b$, les formules de CRAMER fournissent

$$\chi_A = f(0) = \beta = \frac{1}{b-a} (b(X-a)^n - a(X-b)^n).$$

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$.

$$\lambda \text{ valeur propre de } A \Rightarrow \chi_A(\lambda) = 0 \Rightarrow \left(\frac{\lambda-a}{\lambda-b} \right)^n = \frac{a}{b} \Rightarrow \left| \frac{\lambda-a}{\lambda-b} \right| = \left| \frac{a}{b} \right|^{1/n}.$$

Soient M le point du plan d'affixe λ , A le point du plan d'affixe a et B le point du plan d'affixe b puis $k = \left| \frac{a}{b} \right|^{1/n}$. k est un réel strictement positif et distinct de 1. On peut donc poser $I = \text{bar}(A(1), B(-k))$ et $J = \text{bar}(A(1), B(k))$.

$$\begin{aligned}
\lambda \text{ valeur propre de } A &\Rightarrow MA = kMB \Rightarrow MA^2 - k^2MB^2 = 0 \Rightarrow (\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB}) (\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB}) = 0 \\
&\Rightarrow (1-k)\overrightarrow{MI} \cdot (1+k)\overrightarrow{MJ} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MJ} = 0 \\
&\Rightarrow M \text{ est sur le cercle de diamètre } [I, J] \text{ (cercles d'APOLLONIUS (de Perga)).}
\end{aligned}$$

Exercice n° 15

1) Les hypothèses fournissent $AU = U$ où $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ et donc 1 est valeur propre de A .

2) a) Soient λ une valeur propre de A et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{C})$ un vecteur propre associé.

$$AX = \lambda X \Rightarrow \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j = \lambda x_i \Rightarrow \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, |\lambda x_i| \leq \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| |x_j|$$

$$\Rightarrow \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, |\lambda x_i| \leq \left(\sum_{j=1}^n a_{i,j} \right) \text{Max}\{|x_j|, 1 \leq j \leq n\}$$

$$\Rightarrow \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, |\lambda| |x_i| \leq \text{Max}\{|x_j|, 1 \leq j \leq n\}.$$

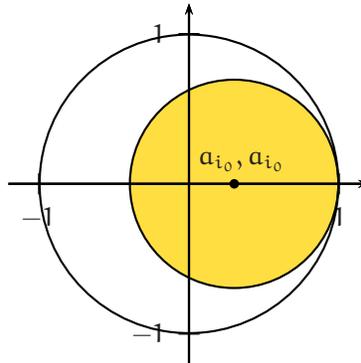
On choisit alors pour i un indice i_0 tel que $|x_{i_0}| = \text{Max}\{|x_j|, 1 \leq j \leq n\}$. Puisque X est non nul, on a $|x_{i_0}| > 0$. On obtient

$$|\lambda| |x_{i_0}| \leq |x_{i_0}| \text{ et donc } |\lambda| \leq 1 \text{ puisque } |x_{i_0}| > 0.$$

b) Plus précisément,

$$|\lambda - a_{i_0, i_0}| |x_{i_0}| = \left| \sum_{j \neq i_0} a_{i_0, j} x_j \right| \leq \sum_{j \neq i_0} a_{i_0, j} |x_j| \leq \left(\sum_{j \neq i_0} a_{i_0, j} \right) |x_{i_0}| = (1 - a_{i_0, i_0}) |x_{i_0}|$$

et donc $\forall \lambda \in \text{Sp}A$, $|\lambda - a_{i_0, i_0}| \leq 1 - a_{i_0, i_0}$ ce qui signifie que les valeurs propres de A appartiennent au disque de centre a_{i_0, i_0} et de rayon $1 - a_{i_0, i_0}$. Ce disque est tangent intérieurement au cercle de centre $(1, 0)$ et de rayon 1 en le point $(1, 0)$.



Exercice n° 16

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. A est antisymétrique si et seulement si ${}^tA = -A$. Dans ce cas

$$\chi_A(X) = \det(XI - A) = \det({}^t(XI - A)) = \det(XI + A) = (-1)^n \det(-XI - A) = (-1)^n \chi_A(-X).$$

Ainsi, χ_A a la parité de n .

Exercice n° 17

Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^n de matrice A dans la base canonique (e_1, \dots, e_n) de \mathbb{R}^n . $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $f(e_i) = e_{n+1-i}$ et donc $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $f^2(e_i) = e_i$. Donc f est une symétrie distincte de l'identité et en particulier $\text{Sp}A = \{-1, 1\}$ et f est diagonalisable. On en déduit que A est diagonalisable dans \mathbb{R} .

Exercice n° 18

1) $J^n = I$. J annule le polynôme $X^n - 1$ qui est à racines simples dans \mathbb{C} et donc J est diagonalisable dans \mathbb{C} .

Les valeurs propres de J sont à choisir parmi les racines n -èmes de 1 dans \mathbb{C} . On pose $\omega = e^{2i\pi/n}$. Vérifions que $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, ω^k est valeur propre de J .

Soient $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ et $X = (x_j)_{1 \leq j \leq n}$ un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

$$JX = \omega^k X \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \omega^k x_1 \\ x_3 = \omega^k x_2 \\ \vdots \\ x_n = \omega^k x_{n-1} \\ x_1 = \omega^k x_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \omega^k x_1 \\ x_3 = (\omega^k)^2 x_1 \\ \vdots \\ x_n = (\omega^k)^{n-1} x_1 \\ x_1 = (\omega^k)^n x_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \omega^k x_1 \\ x_3 = (\omega^k)^2 x_1 \\ \vdots \\ x_n = (\omega^k)^{n-1} x_1 \end{cases}$$

et donc

$$JX = \omega^k X \Leftrightarrow X \in \text{Vect}(U_k) \text{ où } U_k = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^k \\ (\omega^k)^2 \\ \vdots \\ (\omega^k)^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Donc $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, ω^k est valeur propre de J . Les valeurs propres de J sont les n racines n -èmes de 1. Ces valeurs propres sont toutes simples. Le sous espace propre associé à ω^k , $0 \leq k \leq n-1$, est la droite vectorielle $D_k = \text{Vect}(U_k)$.

Soit P la matrice de VANDERMONDE des racines n -èmes de l'unité c'est-à-dire $P = (\omega^{(j-1)(k-1)})_{0 \leq j, k \leq n-1}$ puis

$D = \text{diag}(1, \omega, \dots, \omega^{n-1})$, alors on a déjà vu que $P^{-1} = \frac{1}{n} \overline{P}$ (planche 3, exercice n° 16) et on a

$$J = PDP^{-1} \text{ avec } D = \text{diag}(\omega^j)_{1 \leq j \leq n}, P = (\omega^{(j-1)(k-1)})_{1 \leq j, k \leq n} \text{ et } P^{-1} = \frac{1}{n} \overline{P} \text{ avec } \omega = e^{2i\pi/n}.$$

Remarque. La seule connaissance de D suffit pour le 2).

2) Soit A la matrice de l'énoncé.

$$A = a_0 I + a_1 J + a_2 J^2 + \dots + a_{n-1} J^{n-1} = Q(J) \text{ où } Q = a_0 + a_1 X + \dots + a_{n-1} X^{n-1}.$$

D'après 1), $A = P \times Q(D) \times P^{-1}$ et donc A est semblable à la matrice $\text{diag}(Q(1), Q(\omega), \dots, Q(\omega^{n-1}))$. Par suite, A a même déterminant que la matrice $\text{diag}(Q(1), Q(\omega), \dots, Q(\omega^{n-1}))$. D'où la valeur du déterminant circulant de l'énoncé :

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_2 & & \ddots & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_0 \end{vmatrix} = \prod_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{n-1} e^{2i(j-1)(k-1)\pi/n} a_j \right).$$

Exercice n° 19

1) Soit $\sigma \in S_n$.

$$\det(P_\sigma) = \sum_{\sigma' \in S_n} \varepsilon(\sigma') p_{\sigma'(1),1} \dots p_{\sigma'(n),n} = \sum_{\sigma' \in S_n} \varepsilon(\sigma') \delta_{\sigma'(1),\sigma(1)} \dots \delta_{\sigma'(n),\sigma(n)} = \varepsilon(\sigma),$$

car $\delta_{\sigma'(1),\sigma(1)} \dots \delta_{\sigma'(n),\sigma(n)} \neq 0 \Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sigma'(i) = \sigma(i) \Leftrightarrow \sigma' = \sigma$.

$$\forall \sigma \in S_n, \det(P_\sigma) = \varepsilon(\sigma).$$

2) a) Soit $(\sigma, \sigma') \in S_n^2$. Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$. Le coefficient ligne i, colonne j, de la matrice $P_\sigma \times P_{\sigma'}$ vaut

$$\sum_{k=1}^n \delta_{i,\sigma(k)} \delta_{k,\sigma'(j)}.$$

Dans cette somme, si $k \neq \sigma'(j)$, le terme correspondant est nul et quand $k = \sigma'(j)$, le terme correspondant vaut $\delta_{i,\sigma(\sigma'(j))}$. Finalement, le coefficient ligne i, colonne j, de la matrice $P_\sigma \times P_{\sigma'}$ vaut $\delta_{i,\sigma(\sigma'(j))}$ qui est encore le coefficient ligne i, colonne j, de la matrice $P_{\sigma \circ \sigma'}$.

$$\forall (\sigma, \sigma') \in S_n^2, P_\sigma \times P_{\sigma'} = P_{\sigma \circ \sigma'}.$$

b) Montrons que G est un sous-groupe du groupe $(GL_n(\mathbb{R}), \times)$. G contient $I_n = P_{Id}$ et d'autre part, G est contenu dans $GL_n(\mathbb{R})$ d'après 1). G est stable pour \times d'après 2) et pour le passage à l'inverse car pour tout $\sigma \in S_n, (P_\sigma)^{-1} = P_{\sigma^{-1}} \in G$ (toujours d'après 2)). Donc

$$(G, \times) \text{ est un sous-groupe de } (GL_n(\mathbb{R}), \times).$$

Soit l'application $\varphi : (S_n, \circ) \rightarrow (G, \times)$. φ est un morphisme de groupes d'après 2), surjectif par construction. De plus,

$$\sigma \in \text{Ker}(\varphi) \Leftrightarrow P_\sigma = I_n \Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sigma(i) = i \Leftrightarrow \sigma = \text{Id}_{\llbracket 1, n \rrbracket}.$$

Donc $\text{Ker}(\varphi) = \{\text{Id}\}$ puis φ est injectif et finalement φ est un isomorphisme du groupe (S_n, \circ) sur le groupe (G, \times) .

3) Le coefficient ligne i, colonne j, de la matrice AP_σ vaut

$$\sum_{k=1}^n a_{i,k} \delta_{k,\sigma(j)} = a_{i,\sigma(j)}.$$

Par suite, si C_1, \dots, C_n désignent les colonnes de la matrice A, la matrice AP_σ est la matrice dont les colonnes sont $C_{\sigma(1)}, \dots, C_{\sigma(n)}$.

4) Commençons par trouver le polynôme caractéristique de la matrice associée à un cycle c de longueur ℓ ($2 \leq \ell \leq n$). Soit f_c l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^n$ de matrice P_c dans la base canonique de \mathbb{R}^n . Il existe une base de E dans laquelle la matrice de f_c est $\begin{pmatrix} J_\ell & 0_{\ell, n-\ell} \\ 0_{n-\ell, \ell} & I_{n-\ell} \end{pmatrix}$ où la matrice J_ℓ est la matrice du n° 18. Le polynôme caractéristique χ_{P_c} de P_c est donc $(X-1)^{n-\ell}(X^\ell-1)$ (voir n° 18).

Soit maintenant $\sigma \in S_n$. On note f_σ l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^n$ de matrice P_σ dans la base canonique de \mathbb{R}^n . σ se décompose de manière unique à l'ordre près des facteurs en produit de cycles à supports disjoints, ces cycles commutant deux à deux.

Posons donc $\sigma = c_1 \circ \dots \circ c_p$, $p \geq 1$, où les c_i , $1 \leq i \leq p$, sont des cycles à supports disjoints, et notons ℓ_i la longueur du

cycle c_i , $1 \leq i \leq p$. Il existe une base de E dans laquelle la matrice de f_σ est $\begin{pmatrix} J_{\ell_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & J_{\ell_p} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & I_k \end{pmatrix}$ où $k = n - \ell_1 - \dots - \ell_p$

est le nombre de points fixes de σ .

Le polynôme caractéristique cherché est donc $\chi_{P_\sigma} = (X^{\ell_1} - 1) \dots (X^{\ell_p} - 1)(X - 1)^{n - \ell_1 - \dots - \ell_p}$. On en déduit les valeurs propres de P_σ .

Exercice n° 20

Posons $\chi_f = \prod_{k=1}^p (X - \lambda_k)^{\alpha_k}$ où $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont les valeurs propres deux à deux distinctes de f .

Soit $E'_k = \text{Ker}(f - \lambda_k \text{Id})^{\alpha_k}$ (E'_k s'appelle le sous-espace caractéristique de f associé à la valeur propre λ_k , $1 \leq k \leq p$). D'après le théorème de décomposition des noyaux, $E = E'_1 \oplus \dots \oplus E'_p$. De plus, si f_k est la restriction de f à E'_k alors f_k est un endomorphisme de E'_k (car f et $(f - \lambda_k \text{Id})^{\alpha_k}$ commutent).

On note que $(f_k - \lambda_k \text{Id})^{\alpha_k} = 0$ et donc λ_k est l'unique valeur propre de f_k car toute valeur propre de f_k est racine du polynôme annulateur $(X - \lambda_k)^{\alpha_k}$.

Existence de d et n . On définit d par ses restrictions d_k aux E'_k , $1 \leq k \leq p$: d_k est l'homothétie de rapport λ_k . Puis on définit n par $n = f - d$.

d est diagonalisable car toute base de E adaptée à la décomposition $E = E'_1 \oplus \dots \oplus E'_p$ est une base de vecteurs propres de d . De plus, $f = d + n$.

Soit n_k la restriction de n à E'_k . On a $n_k = f_k - \lambda_k \text{Id}_{E'_k}$ et par définition de E'_k , $n_k^{\alpha_k} = 0$. Mais alors, si on pose $\alpha = \text{Max}\{\alpha_1, \dots, \alpha_p\}$, on a $n_k^\alpha = 0$ pour tout k de $\{1, \dots, p\}$ et donc $n^\alpha = 0$. Ainsi, n est nilpotent. Enfin, pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, n_k commute avec d_k car d_k est une homothétie et donc $nd = dn$.

Unicité de d et n . Supposons que $f = d + n$ avec d diagonalisable, n nilpotent et $nd = dn$.

d commute avec n et donc avec f car $df = d^2 + dn = d^2 + nd = fd$. Mais alors, $n = f - d$ commute également avec f . d et n laissent donc stables les sous-espaces caractéristiques E'_k , $1 \leq k \leq p$ de f . Pour $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on note d_k et n_k les restrictions de d et n à E'_k .

Soient $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ puis μ une valeur propre de d_k . D'après l'exercice n° 7,

$$\det(f_k - \mu \text{Id}) = \det(d_k - \mu \text{Id} + n) = \det(d_k - \mu \text{Id}) = 0,$$

car $d_k - \mu \text{Id}$ n'est pas inversible. On en déduit que $f_k - \mu \text{Id}$ n'est pas inversible et donc que μ est valeur propre de f_k . Puisque λ_k est l'unique valeur propre de f_k , on a donc $\mu = \lambda_k$. Ainsi, λ_k est l'unique valeur propre de d_k et puisque d_k est diagonalisable (voir exercice n° 36), on a nécessairement $d_k = \lambda_k \text{Id}_{E'_k}$ puis $n_k = f_k - \lambda_k \text{Id}_{E'_k}$. Ceci montre l'unicité de d et n .

Exercice n° 21

On cherche une matrice A de format 4 dont le polynôme caractéristique est $X^4 - 3X^3 + X^2 - 1$. La matrice compagnon

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ convient (voir planche 4, exercice n° 15) et le théorème de CAYLEY-HAMILTON montre que

$$A^4 - 3A^3 + A^2 - I_4 = 0.$$

Exercice n° 22

Soit A la matrice de l'énoncé. $\det A$ est le produit des valeurs propres de A .

- Si $b = 0$, $\det A = a^n$.
- Si $b \neq 0$, $\text{rg}(A - (a - b)I) = 1$ ou encore $\dim(\text{Ker}(A - (a - b)I)) = n - 1$. Par suite, $a - b$ est valeur propre d'ordre $n - 1$ au moins. On obtient la valeur propre manquante λ par la trace de A : $(n - 1)(a - b) + \lambda = na$ et donc $\lambda = a + (n - 1)b$. Finalement $\det A = (a - b)^{n-1}(a + (n - 1)b)$ ce qui reste vrai quand $b = 0$.

$$\begin{vmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{vmatrix} = (a - b)^{n-1}(a + (n - 1)b).$$

Exercice n° 23

A est de format 2 et donc, soit a deux valeurs propres distinctes et est dans ce cas diagonalisable dans \mathbb{C} , soit a une valeur propre double λ non nulle car $\text{Tr} A = 2\lambda \neq 0$.

Dans ce dernier cas, A^2 est diagonalisable et est donc semblable à $\text{diag}(\lambda^2, \lambda^2) = \lambda^2 I$. Par suite, $A^2 = \lambda^2 I$. Ainsi, A annule le polynôme $X^2 - \lambda^2 = (X - \lambda)(X + \lambda)$ qui est scindé sur \mathbb{R} à racines simples. Dans ce cas aussi, A est diagonalisable.

Exercice n° 24

1) Soit $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Soit F une primitive de f sur \mathbb{R} . Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a $(\varphi(f))(x) = \frac{F(x) - F(0)}{x - 0}$.

F est continue sur \mathbb{R} donc $\varphi(f)$ est continue sur \mathbb{R}^* . De plus, F étant dérivable en 0

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} (\varphi(f))(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = F'(0) = f(0) = (\varphi(f))(0).$$

Finalement $\varphi(f)$ est continue sur \mathbb{R} . Ainsi, φ est une application de E dans E . La linéarité de φ est claire et finalement

$$\varphi \in \mathcal{L}(C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})).$$

2) Si f est dans $\text{Ker}(\varphi)$ alors $f(0) = 0$ et pour tout x non nul, $\int_0^x f(t) dt = 0$. Par dérivation on obtient $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = 0$ ce qui reste vrai pour $x = 0$ et donc $f = 0$. Finalement $\text{Ker}(\varphi) = \{0\}$ et φ est injective.

φ n'est pas surjective car pour toute $f \in E$, $\varphi(f)$ est de classe C^1 sur \mathbb{R}^* . Mais alors par exemple, l'application $g : x \mapsto |x - 1|$ est dans E mais n'est pas dans $\text{Im}(\varphi)$.

$$\varphi \text{ est injective et n'est pas surjective.}$$

3) On cherche $\lambda \in \mathbb{R}$ et f continue sur \mathbb{R} et non nulle telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $(\varphi(f))(x) = \lambda f(x)$. D'après la question précédente, 0 n'est pas valeur propre de φ et donc nécessairement $\lambda \neq 0$.

Pour $x = 0$, nécessairement $f(0) = \lambda f(0)$ et donc ou bien $\lambda = 1$ ou bien $f(0) = 0$.

On doit avoir pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = \frac{1}{\lambda x} \int_0^x f(t) dt$. f est nécessairement dérivable sur \mathbb{R}^* . Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a

$$\int_0^x f(t) dt = \lambda x f(x) \text{ et par dérivation, on obtient pour } x \in \mathbb{R}^*,$$

$$f(x) = \lambda(xf'(x) + f(x)).$$

Soit I l'un des deux intervalles $] -\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$.

$$\begin{aligned} \forall x \in I, f(x) = \lambda(xf'(x) + f(x)) &\Rightarrow \forall x \in I, f'(x) + \frac{\lambda - 1}{\lambda x} f(x) = 0 \\ &\Rightarrow \forall x \in I, e^{\frac{(\lambda - 1) \ln |x|}{\lambda}} f'(x) + \frac{\lambda - 1}{\lambda x} e^{\frac{(\lambda - 1) \ln |x|}{\lambda}} f(x) = 0 \\ &\Rightarrow \forall x \in I, \left(|x|^{\frac{\lambda - 1}{\lambda}} f \right)'(x) = 0 \\ &\Rightarrow \exists K \in \mathbb{R} / \forall x \in I, |x|^{\frac{\lambda - 1}{\lambda}} f(x) = K \Rightarrow \exists K \in \mathbb{R} / \forall x \in I, f(x) = K |x|^{\frac{1 - \lambda}{\lambda}}. \end{aligned}$$

1er cas. Si $\lambda \in] -\infty, 0[\cup]1, +\infty[$ alors $\frac{1 - \lambda}{\lambda} < 0$ et donc $\lim_{x \rightarrow 0} |x|^{\frac{1 - \lambda}{\lambda}} = +\infty$. La fonction $x \mapsto K |x|^{\frac{1 - \lambda}{\lambda}}$ ne peut donc être la restriction à I d'une fonction continue sur \mathbb{R} que dans le cas $K = 0$. Ceci fournit $f_{/]-\infty, 0[} = 0$, $f_{/]0, +\infty[} = 0$ et $f(0) = 0$ par continuité en 0. Donc f est nécessairement nulle et λ n'est pas valeur propre de φ dans ce cas.

2ème cas. Si $\lambda = 1$, les restrictions de f à $] -\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$ sont constantes et donc, par continuité de f en 0 , f est constante sur \mathbb{R} . Réciproquement, les fonctions constantes f vérifient bien $\varphi(f) = f$. Ainsi, 1 est valeur propre de f et le sous-espace propre associé est constitué des fonctions constantes.

3ème cas. Si $\lambda \in]0, 1[$, nécessairement $\exists (K_1, K_2) \in \mathbb{R}^2 / \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} K_1 x^{\frac{1}{\lambda}-1} & \text{si } x \geq 0 \\ K_2 (-x)^{\frac{1}{\lambda}-1} & \text{si } x < 0 \end{cases}$. f ainsi définie est bien

continue sur \mathbb{R} . Calculons alors $\varphi(f)$.

$(\varphi(f))(0) = f(0) = 0$ puis si $x > 0$,

$$(\varphi(f))(x) = \frac{1}{x} \int_0^x K_1 t^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} dt = \frac{\lambda K_1}{x} x^{\frac{1}{\lambda}} = \lambda K_1 x^{\frac{1}{\lambda}-1} = \lambda f(x)$$

et de même si $x < 0$. Enfin, $(\varphi(f))(0) = 0 = \lambda f(0)$. Finalement $\varphi(f) = \lambda f$. λ est donc valeur propre de φ ($K_1 = K_2 = 1$ fournit une fonction non nulle) et le sous-espace propre associé à λ est de dimension 2. Une base de ce sous-espace est

$$(f_1, f_2) \text{ où } \forall x \in \mathbb{R}, f_1(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{\lambda}-1} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \text{ et } f_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq 0 \\ (-x)^{\frac{1}{\lambda}-1} & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Finalement

$$\text{Sp}(\varphi) =]0, 1].$$

Exercice n° 25

Trouvons un polynôme scindé à racines simples annulant f .

Le polynôme $P = X(X - \lambda)(X - \mu) = X^3 - (\lambda + \mu)X^2 + \lambda\mu X$ est annulateur de f . En effet,

$$\begin{aligned} P(f) &= f^3 - (\lambda + \mu)f^2 + \lambda\mu f = (\lambda^3 - (\lambda + \mu)\lambda^2 + (\lambda\mu)\lambda)u + (\mu^3 - (\lambda + \mu)\mu^2 + (\lambda\mu)\mu)v \\ &= P(\lambda)u + P(\mu)v = 0. \end{aligned}$$

- Si λ et μ sont distincts et non nuls, P est un polynôme scindé à racines simples annulateur de f et donc f est diagonalisable.
- Si $\lambda = \mu = 0$, alors $f = 0$ et donc f est diagonalisable.
- Si par exemple $\lambda \neq 0$ et $\mu = 0$, $f^2 = \lambda^2 u = \lambda f$ et le polynôme $P = X(X - \lambda)$ est scindé à racines simples et annulateur de f . Dans ce cas aussi f est diagonalisable.
- Enfin si $\lambda = \mu \neq 0$, $f^2 = \lambda^2(u + v) = \lambda f$ et de nouveau $P = X(X - \lambda)$ est scindé à racines simples et annulateur de f .

Dans tous les cas, f est diagonalisable.

Exercice n° 26

Posons $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a $N^2 = E_{1,3}$ et $N^3 = 0$. Si $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ est une matrice carrée vérifiant $X^2 = N$, alors

$X^6 = 0$. Donc X est nilpotente et, puisque X est de format 3, on sait que $X^3 = 0$. Mais alors $N^2 = X^4 = 0$ ce qui n'est pas. L'équation proposée n'a pas de solution.

Exercice n° 27

Montrons le résultat par récurrence sur $n = \dim E \geq 1$.

- Si $n = 1$, c'est clair.
- Soit $n \geq 1$. Supposons que deux endomorphismes d'un \mathbb{C} -espace de dimension n qui commutent soient simultanément trigonalisables.

Soient f et g deux endomorphismes d'un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension $n + 1$ tels que $fg = gf$.

f et g ont au moins un vecteur propre en commun. En effet, f admet au moins une valeur propre λ . Soit E_λ le sous-espace propre de f associé à λ . g commute avec f et donc laisse stable E_λ . La restriction de g à E_λ est un endomorphisme de E_λ qui est de dimension finie non nulle. Cette restriction admet donc une valeur propre et donc un vecteur propre. Ce vecteur est un vecteur propre commun à f et g .

Commençons à construire une base de trigonalisation simultanée de f et g . Soit x un vecteur propre commun à f et g . On complète la famille libre (x) en une base $\mathcal{B} = (x, \dots)$ de E . Dans la base \mathcal{B} , les matrices M et N de f et g s'écrivent

respectivement $M = \begin{pmatrix} \lambda & \times \\ 0 & M_1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} \mu & \times \\ 0 & N_1 \end{pmatrix}$ où M_1 et N_1 sont de format n . Un calcul par blocs montre que

M_1 et N_1 commutent ou encore si f_1 et g_1 sont les endomorphismes de \mathbb{C}^n de matrices M_1 et N_1 dans la base canonique de \mathbb{C}^n , f_1 et g_1 commutent. Par hypothèse de récurrence, f_1 et g_1 sont simultanément trigonalisables. Donc il existe une matrice inversible P_1 de format n et deux matrices triangulaires supérieures T_1 et T'_1 de format n telles que $P_1^{-1}M_1P_1 = T_1$ et $P_1^{-1}N_1P_1 = T'_1$.

Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_1 \end{pmatrix}$. P est inversible de format $n + 1$ car $\det P = \det P_1 \neq 0$ et un calcul par blocs montre que $P^{-1}MP$ et $P^{-1}NP$ sont triangulaires supérieures.

P est donc la matrice de passage de la base \mathcal{B} à une base de trigonalisation simultanée de f et g .

Exercice n° 28

Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ la famille des valeurs propres de A . On a donc $\chi_A = (X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_n)$.

$$\begin{aligned} \chi_A(B) \text{ inversible} &\Leftrightarrow (B - \lambda_1 I) \dots (B - \lambda_n I) \text{ inversible} \\ &\Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, B - \lambda_k I \text{ inversible (car } \det((B - \lambda_1 I) \dots (B - \lambda_n I)) = \det(B - \lambda_1 I) \times \dots \times \det(B - \lambda_n I)) \\ &\Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_k \text{ n'est pas valeur propre de } B \\ &\Leftrightarrow \text{Sp}A \cap \text{Sp}B = \emptyset. \end{aligned}$$

Exercice n° 29

Si P et χ_f sont premiers entre eux, d'après le théorème de BÉZOUT, il existe deux polynômes U et V tels que $UP + V\chi_f = 1$. En prenant la valeur en f et puisque que $\chi_f(f) = 0$, on obtient $P(f) \circ U(f) = U(f) \circ P(f) = \text{Id}$. $P(f)$ est donc un automorphisme de E .

Réciproquement, si P et χ_f ne sont pas premiers entre eux, P et χ_f ont une racine commune λ dans \mathbb{C} . Soit A la matrice de f dans une base donnée (si \mathbb{K} n'est pas \mathbb{C} l'utilisation de la matrice est indispensable). On a $P(A) = (A - \lambda I)Q(A)$ pour un certain polynôme Q . La matrice $A - \lambda I$ n'est pas inversible car λ est valeur propre de A et donc $P(A)$ n'est pas inversible ($\det(P(A)) = \det(A - \lambda I)\det Q(A) = 0$) puis $P(f)$ n'est pas un automorphisme.

Exercice n° 30

$\text{rg}(M_{a,b} - I) = 1$, si $a = b = 0$, 2 si l'un des deux nombres a ou b est nul et l'autre pas et 3 si a et b ne sont pas nuls. Donc $M_{0,0}$ n'est semblable à aucune des trois autres matrices et de même pour $M_{1,1}$.

Il reste à savoir si les matrices $M_{1,0}$ et $M_{0,1}$ sont semblables.

$(M_{1,0} - I)^2 = (E_{1,2} + E_{2,3})^2 = E_{1,3} \neq 0$ et $(M_{0,1} - I)^2 = (E_{1,2} + E_{3,4})^2 = 0$. Donc les matrices $M_{1,0}$ et $M_{0,1}$ ne sont pas semblables.

Exercice n° 31

Soit B la matrice de l'énoncé. $\text{rg}B = 1$ et si A existe, nécessairement $\text{rg}A = n - 1$ (planche 3, exercice n° 18).

Une matrice de rang 1 admet l'écriture générale U^tV où U et V sont des vecteurs colonnes non nuls. Ici $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$ et

$$V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Si A existe, A doit déjà vérifier $A^tB = {}^tBA = 0$ ou encore $AV^tU = 0$ (1) et $V^tUA = 0$ (2). En multipliant les deux membres de l'égalité (1) par U à droite puis en simplifiant par le réel non nul ${}^tUU = \|U\|_2^2$, on obtient $AV = 0$. Ceci montre que la première colonne de A est nulle (les $n - 1$ dernières devant alors former une famille libre).

De même, en multipliant les deux membres de l'égalité (2) par tV à gauche, on obtient ${}^tUA = 0$ et donc les colonnes de la matrice A sont orthogonales à U (pour le produit scalaire usuel) ce qui invite franchement à considérer la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & \dots & \dots & -n \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ qui convient.}$$

Exercice n° 32

(Si les α_k sont réels, la matrice A est symétrique réelle et les redoublants savent que la matrice A est diagonalisable.)

Si tous les α_k , $1 \leq k \leq n - 1$, sont nuls la matrice A est diagonalisable car diagonale.

On suppose dorénavant que l'un au moins des α_k , $1 \leq k \leq n - 1$, est non nul. Dans ce cas, $\text{rg}A = 2$.

0 est valeur propre d'ordre $n - 2$ au moins. Soient λ et μ les deux dernières valeurs propres. On a

$$\lambda + \mu = \text{Tr}A = a_n \text{ et } \lambda^2 + \mu^2 = \text{Tr}(A^2) = \sum_{k=1}^{n-1} a_k^2 + \sum_{k=1}^n a_k^2 = 2 \sum_{k=1}^{n-1} a_k^2 + a_n^2.$$

$$\lambda \text{ et } \mu \text{ sont solutions du système } \begin{cases} \lambda + \mu = a_n \\ \lambda^2 + \mu^2 = 2 \sum_{k=1}^{n-1} a_k^2 + a_n^2 \end{cases} \text{ qui équivaut au système } \begin{cases} \lambda + \mu = a_n \\ \lambda\mu = - \sum_{k=1}^{n-1} a_k^2 \end{cases} \quad (S).$$

On a alors les situations suivantes :

- Si λ et μ sont distincts et non nuls, A est diagonalisable car l'ordre de multiplicité de chaque valeur propre est égale à la dimension du sous-espace propre correspondant.
- Si λ ou μ est nul, A n'est pas diagonalisable car l'ordre de multiplicité de la valeur propre 0 est différent de $n - 2$, la dimension du noyau de A .
- Si $\lambda = \mu \neq 0$, A est diagonalisable si et seulement si $\text{rg}(A - \lambda I) = n - 2$ mais on peut noter que si λ n'est pas nul, on a toujours $\text{rg}(A - \lambda I) = n - 1$ en considérant la matrice extraite formée des $n-1$ premières lignes et colonnes.

En résumé, la matrice A est diagonalisable si et seulement si le système (S) admet deux solutions distinctes et non nulles.

Mais λ et μ sont solutions du système (S) si et seulement si λ et μ sont les racines de l'équation (E) : $X^2 - a_n X - \sum_{k=1}^{n-1} a_k^2 = 0$.

Par suite, A est diagonalisable si et seulement si $\sum_{k=1}^{n-1} a_k^2 \neq 0$ et $\Delta = a_n^2 + 4 \sum_{k=1}^{n-1} a_k^2 \neq 0$.

Exercice n° 33

$$1) \chi_A = \begin{vmatrix} X-1 & -1 & 1 \\ -1 & X-1 & -1 \\ -1 & -1 & X-1 \end{vmatrix} = (X-1)(X^2 - 2X) + (2-X) - (2-X) = X(X-1)(X-2).$$

On est dans le cas d'une matrice diagonalisable avec 3 valeurs propres simples.

Recherche des droites stables. Dans chacun des cas, les droites stables sont les droites engendrées par des vecteurs propres. On obtient immédiatement les 3 droites stables : $E_0 = \text{Vect}(e_1)$ où $e_1 = (1, -1, 0)$, $E_1 = \text{Vect}(e_2)$ où $e_2 = (1, -1, -1)$ et $E_2 = \text{Vect}(e_3)$ où $e_3 = (0, 1, 1)$.

Recherche des plans stables. Soit P un plan stable par f . La restriction de f à P est un endomorphisme de P et on sait de plus que le polynôme caractéristique de $f|_P$ divise celui de f . $f|_P$ est diagonalisable car f l'est car on dispose d'un polynôme scindé à racines simples annihilant f et donc $f|_P$. On en déduit que P est engendré par deux vecteurs propres indépendants de $f|_P$ qui sont encore vecteurs propres de f . On obtient trois plans stables : $P_1 = \text{Vect}(e_2, e_3)$, $P_2 = \text{Vect}(e_1, e_3)$ et $P_3 = \text{Vect}(e_1, e_2)$.

$$2) \chi_A = \begin{vmatrix} X-2 & -2 & -1 \\ -1 & X-3 & -1 \\ -1 & -2 & X-2 \end{vmatrix} = (X-2)(X^2 - 5X + 4) + (-2X + 2) - (X-1) = (X-1)((X-2)(X-4) - 2 - 1) = (X-1)(X^2 - 6X + 5) = (X-1)^2(X-5).$$

Puis E_1 est le plan d'équation $x + 2y + z = 0$ et $E_5 = \text{Vect}((1, 1, 1))$.

On est toujours dans le cas diagonalisable mais avec une valeur propre double.

Les droites stables sont $E_5 = \text{Vect}((1, 1, 1))$ et n'importe quelle droite contenue dans E_1 . Une telle droite est engendrée par un vecteur de la forme $(x, y, -x - 2y)$ avec $(x, y) \neq (0, 0)$.

Recherche des plans stables. Soit P un plan stable par f . f est diagonalisable et donc $f|_P$ est un endomorphisme diagonalisable de P . Par suite, P est engendré par deux vecteurs propres indépendants de f . On retrouve le plan propre de f d'équation $x + 2y + z = 0$ et les plans engendrés par $(1, 1, 1)$ et un vecteur quelconque non nul du plan d'équation $x + 2y + z = 0$. L'équation générale d'un tel plan est $(-a - 3b)x + (2a + 2b)y + (b - a)z = 0$ où $(a, b) \neq (0, 0)$.

3)

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X-6 & 6 & -5 \\ 4 & X+1 & -10 \\ -7 & 6 & X-4 \end{vmatrix} = (X-6)(X^2 - 3X + 56) - 4(6X + 6) - 7(5X - 55) = X^3 - 9X^2 + 15X + 25 \\ = (X+1)(X^2 - 10X + 25) = (X+1)(X-5)^2.$$

$E_{-1} = \text{Vect}(10, 15, 4)$ et $E_5 = \text{Vect}((1, 1, 1))$. On est dans le cas où A admet une valeur propre simple et une double mais n'est pas diagonalisable. Les droites stables par f sont les deux droites propres.

Recherche des plans stables. Soit P un plan stable par f . Le polynôme caractéristique de $f|_P$ est unitaire et divise celui de f . Ce polynôme caractéristique est donc soit $(X+1)(X-5)$ soit $(X-5)^2$.

Dans le premier cas, $f|_P$ est diagonalisable et P est nécessairement le plan $\text{Vect}((10, 15, 4)) + \text{Vect}((1, 1, 1))$ c'est-à-dire le plan d'équation $11x - 6y - 5z = 0$.

Dans le deuxième cas, $\chi_{f|_P} = (X - 5)^2$ et 5 est l'unique valeur propre de $f|_P$. Le théorème de CAYLEY-HAMILTON montre que $(f|_P - 5\text{Id})^2 = 0$ et donc P est contenu dans $\text{Ker}(f - 5\text{Id})^2$. $\text{Ker}(f - 5\text{Id})^2$ est le plan d'équation $x = z$ qui est bien sûr stable par f car $(f - 5\text{Id})^2$ commute avec f .

Exercice n° 34

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 2 & 6 & -14 \\ 1 & 3 & -7 \end{pmatrix}$. A est de rang 1 et donc admet deux valeurs propres égales à 0. $\text{Tr}A = 0$ et donc la troisième

valeur propre est encore 0. Donc $\chi_A = X^3$. A est nilpotente et le calcul donne $A^2 = 0$. Ainsi, si X est une matrice telle que $X^2 = A$ alors X est nilpotente et donc $X^3 = 0$.

Réduction de A . $A^2 = 0$. Donc $\text{Im}A \subset \text{Ker}A$. Soit e_3 un vecteur non dans $\text{Ker}A$ puis $e_2 = Ae_3$. (e_2) est une base de $\text{Im}A$ que l'on complète en (e_1, e_2) base de $\text{Ker}A$.

(e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$ car si $ae_1 + be_2 + ce_3 = 0$ alors $A(ae_1 + be_2 + ce_3) = 0$ c'est-à-dire $ce_2 = 0$ et donc $c = 0$. Puis $a = b = 0$ car la famille (e_1, e_2) est libre.

Si P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$ à la base (e_1, e_2, e_3) alors $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On

voit peut prendre $P = \begin{pmatrix} 3 & -7 & 0 \\ -1 & -14 & 0 \\ 0 & -7 & 1 \end{pmatrix}$.

Si $X^2 = A$, X commute avec A et donc X laisse stable $\text{Im}A$ et $\text{Ker}A$. On en déduit que Xe_2 est colinéaire à e_2 et Xe_1 est dans $\text{Vect}(e_1, e_2)$. Donc $P^{-1}XP$ est de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 & d \\ b & c & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$. De plus, X est nilpotente de polynôme caractéristique

$(\lambda - a)(\lambda - c)(\lambda - f)$. On a donc nécessairement $a = c = f = 0$. $P^{-1}XP$ est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ a & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Enfin, $X^2 = A \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ a & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow ab = 1$.

Les matrices X solutions sont les matrices de la forme $P \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{a} \\ a & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$ où a est non nul et b quelconque.

On trouve $P^{-1} = \frac{1}{49} \begin{pmatrix} 14 & -7 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ -7 & -21 & 49 \end{pmatrix}$ puis

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{49} \begin{pmatrix} 3 & -7 & 0 \\ -1 & -14 & 0 \\ 0 & -7 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{a} \\ a & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14 & -7 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ -7 & -21 & 49 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{49} \begin{pmatrix} -7a & 0 & \frac{3}{a} - 7b \\ -14a & 0 & -\frac{1}{a} - 14b \\ -7a & 0 & -7b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14 & -7 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ -7 & -21 & 49 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2a - \frac{3}{7a} + b & a - \frac{9}{7a} + 3b & \frac{3}{a} - 7b \\ -4a + \frac{1}{7a} + 2b & 2a + \frac{3}{7a} + 6b & -\frac{1}{a} - 14b \\ -2a + b & a + 3b & -7b \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Exercice n° 35

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X-1 & 0 & 1 \\ -1 & X-2 & -1 \\ -2 & -2 & X-3 \end{vmatrix} = (X-1)(X^2 - 5X + 4) + (2X-2) = (X-1)(X^2 - 5X + 4 + 2) = (X-1)(X-2)(X-3).$$

A est à valeurs propres réelles et simples. A est diagonalisable dans \mathbb{R} et les sous-espaces propres sont des droites.

Si M est une matrice qui commute avec A , M laisse stable ces droites et donc si P est une matrice inversible telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale alors la matrice $P^{-1}MP$ est diagonale. Réciproquement une telle matrice commute avec A .

$$C(A) = \{P \text{diag}(a, b, c)P^{-1}, (a, b, c) \in \mathbb{C}^3\}.$$

$$\text{On trouve } C(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 2b-c & -a+2b-c & \frac{a-c}{2} \\ -b+c & a-b+c & (-a+c)/2 \\ 2c-2b & -2b+c & c \end{pmatrix}, (a, b, c) \in \mathbb{C}^3 \right\}. \text{ On peut vérifier que } C(A) = \text{Vect}(I, A, A^2).$$

Exercice n° 36

F est stable par f et donc $f|_F$ est un endomorphisme de F . f est diagonalisable et donc il existe un polynôme P , scindé à racines simples, tel que $P(f) = 0$. Mais alors $P(f|_F) = 0$ et on a trouvé un polynôme scindé sur \mathbb{K} à racines simples annulateur de $f|_F$. Donc $f|_F$ est diagonalisable.

Exercice n° 37

Soit $P = X^3 + X^2 + X = X(X-j)(X-j^2)$. P est à racines simples dans \mathbb{C} et annulateur de A . Donc A est diagonalisable dans \mathbb{C} et ses valeurs propres sont à choisir dans $\{0, j, j^2\}$. Le polynôme caractéristique de A est de la forme $X^\alpha(X-j)^\beta(X-j^2)^\gamma$ avec $\alpha + \beta + \gamma = n$. De plus, A est réelle et on sait que j et $j^2 = \bar{j}$ ont même ordre de multiplicité ou encore $\gamma = \beta$.

Puisque A est diagonalisable, l'ordre de multiplicité de chaque valeur propre est égale à la dimension du sous-espace propre correspondant et donc

$$\text{rg}(A) = n - \dim(\text{Ker}A) = n - \alpha = 2\beta.$$

On a montré que $\text{rg}A$ est un entier pair.